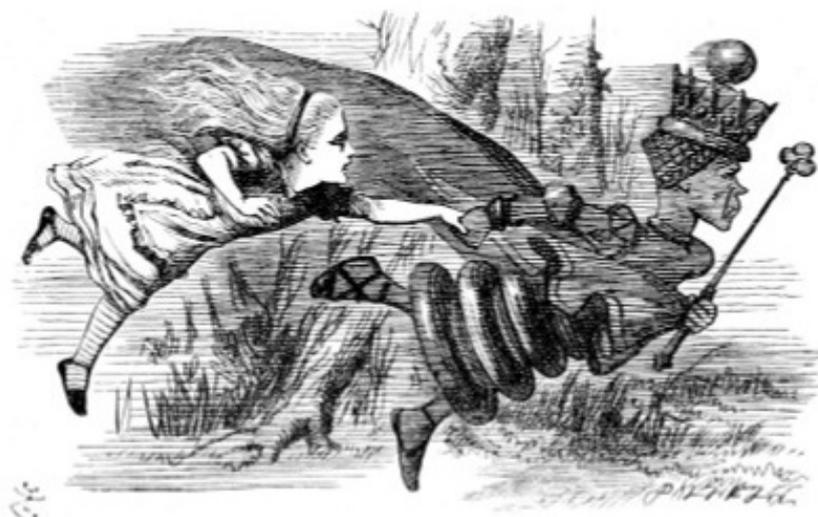


Записки к курсу
«Теория неупорядоченных систем»

Сайкин Давид
mailto: saykind@itp.ac.ru



Последняя компиляция: 29 декабря 2017 г.

Содержание

1	Модель Андерсона	
	Плотность состояний в модели Андерсона	
	1.1. Модель Андерсона в приближении слабого беспорядка	
	1.2. Модель Андерсона в приближении сильного беспорядка	
	Плотность состояний в модели Ллойда	
	1.3. Асимптотические оценки выражения Ллойда для плотности состояний	
	1.4. Плотность состояний в модели Ллойда в размерности $d = 1$	
	Метод оптимальной флуктуации.	
	1.5. Дискретное нелинейное уравнение Шрёдингера	
2	Прыжковая проводимость	
	Магнетосопротивление в двумерном случае.	
	Список литературы	

1 Модель Андерсона

Модель Андерсона была придумана для описания перехода диэлектрик–металл при добавлении примесей. Рассматривается простая прыжковая модель (модель сильной связи) на кубической решётке.

$$\hat{H} = t \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{c}_i^+ \hat{c}_j + \sum_i \varepsilon_i \hat{c}_i^+ \hat{c}_i. \quad (1.1)$$

Роль примесей описывается с помощью случайных энергий узловых ε_i , предполагаются распределёнными одинаковым образом согласно однопараметрическому закону $P(E)$. Обычно рассматриваются распределение одного из следующих трёх типов.

$$P(E) = \frac{1}{W} \theta \left(\frac{W}{2} - |E| \right), \quad P(E) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{E^2 + \Gamma^2}, \quad P(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta^2} \exp \left[-\frac{E^2}{2\Delta^2} \right]. \quad (1.2)$$

Если не оговорено противное, буду использовать первую функцию, как это сделал Андерсон в оригинальной статье [1].

Прежде чем ответить на вопрос о локализации состояний электронов в твёрдом теле, изучу более простой вопрос о поведении плотности состояний в присутствии беспорядка.

Плотность состояний в модели Андерсона

Исследую плотность состояний (в трансляционно инвариантном гамильтониане собственные состояния нумеруются волновым вектором)

$$\nu(E) = \frac{1}{V} \sum_k \delta(E - E_k) = \int_{-\frac{\pi}{a}}^{\frac{\pi}{a}} \frac{dk}{2\pi} \delta(E - E(k)). \quad (1.3)$$

в модели Андерсона при разных значениях параметров t , W по отношению друг к другу и энергии E , в разных размерностях $d = 1, 2, 3$.

В отсутствие беспорядка имеется зона делокализованных состояний ширины $2d|t|$, которая вблизи особенностей Ван Хофа либо расходится ($d = 1$), либо слабо зависит от энергии ($d = 2$), либо зануляется корневым образом ($d = 3$).

$$\nu_{d=1}(E) = \frac{1}{\pi V_0} \frac{\theta(2|t| - |E|)}{\sqrt{|2t|^2 - E^2}} \sim \frac{1}{2\pi V_0 \sqrt{t}} \frac{\theta(2|t| - |E|)}{\sqrt{|2t| - |E|}}, \quad (1.4)$$

$$\nu_{d=2}(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi V_0 |t|} \left(\frac{\sin k_x a}{k_x a} + \frac{\sin k_y a}{k_y a} \right)^{-1} \sim \frac{\theta(4|t| - |E|)}{8\pi V_0 |t|} \left(1 + \frac{1}{3} \left(1 - \left| \frac{E}{4t} \right| \right) \right), \quad (1.5)$$

$$\nu_{d=3}(\mathbf{k}) = \frac{|\mathbf{k}|}{4\pi^2 V_0 |t|} \left(\frac{\sin k_x a}{k_x a} + \frac{\sin k_y a}{k_y a} + \frac{\sin k_z a}{k_z a} \right)^{-1} \sim \frac{\theta(6|t| - |E|)}{12\pi^2 V_0 |t|} \sqrt{6 - |E/t|}, \quad (1.6)$$

при энергиях близких к краю зоны $|E| \rightarrow 2d|t|$.

Эффект беспорядка может быть учтён по теории возмущений (смотри задачу 1.2). Удобно найти поправку к функции Грина по крестовой технике и вычислить плотность состояний с помощью формулы

$$\nu(E) = \frac{-1}{\pi} \text{Im} \int \frac{d\mathbf{r}}{V} G_E^{(R)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \frac{-1}{\pi} \text{Im} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} G_E^{(R)}(\mathbf{k}), \quad G_E^{(R)}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}')}{E - E_{\mathbf{k}} + i0}, \quad (1.7)$$

а собственные функции гамильтониана предполагаются нормированными, согласно

$$\langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = \int \psi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{\mathbf{k}'\mathbf{k}} = \frac{(2\pi)^d}{V} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (1.8)$$

Задачи

Задача 1.1. Найти пертурбативно плотность состояний $\nu_d(E)$ в модели Андерсона в первом исчезающем порядке по $W \ll t$.

Решение задачи 1.1. Рассматривая $\hat{V} = \sum_i \varepsilon_i \hat{c}_i^\dagger \hat{c}_i$ как возмущение, нахожу первую исчезающую после усреднения по беспорядку поправку к функции Грина

$$\hat{G}^{(2)}(\mathbf{k}) = \langle \mathbf{k} | \hat{G}^{(0)} \hat{V} \hat{G}^{(0)} \hat{V} \hat{G}^{(0)} | \mathbf{k} \rangle = [G^{(0)}(\mathbf{k})]^2 \frac{\langle \varepsilon^2 \rangle}{N} \sum_{\mathbf{q}} G^{(0)}(\mathbf{q}). \quad (1.9)$$

Поправка к плотности состояний

$$\nu^{(2)}(E) = \frac{-1}{\pi V_0} \text{Im} \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(E - \varepsilon_{\mathbf{k}} + i0)^2} \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{E - \varepsilon_{\mathbf{q}} + i0} \quad (1.10)$$

Продолжение следует...

Задача 1.2. Плотность состояний в модели Андерсона в нулевом порядке по параметру t/W повторяет функцию распределения $P(E)$.

$$\langle \nu \rangle(E) = \frac{1}{V} \sum_k \langle \delta(E - \varepsilon_k) \rangle = \frac{P(E)}{V_0} = \frac{\theta\left(\frac{W}{2} - |E|\right)}{V_0 W}. \quad (1.11)$$

Найдите следующую поправку по параметру t/W , если узлы расположены на кубической решётке с координационным числом z .

Для получения правильного ответа в области энергий $|E| \ll \frac{W}{2}$ достаточно рассматривать только конфигурации узлов с попарно различными энергиями $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$. Чтобы получить правильную поправку при $|E| \sim \frac{W}{2}$, необходимо также учесть пары с равными энергиями $\varepsilon_i = \varepsilon_j \neq \varepsilon_k$.

Ответ к задаче 1.2. График плотности состояний $V_0 \langle \nu \rangle(E)$, найденной по теории возмущений с точностью до $\mathcal{O}(t/W)^3$ представлен на Рис. 1.1b.

$$V_0 \langle \nu \rangle(E) = \frac{\theta\left(\frac{W}{2} + t - |E|\right)}{W} \begin{cases} 1 - \frac{zt^2}{\left(\frac{W}{2}\right)^2 - E^2} - z(z-1) \left(\frac{2t}{W}\right)^2, & |E| < \frac{W}{2} - t \\ 1 - \frac{zt^2}{W\left(\frac{W}{2} + |E|\right)} - \frac{z}{2} + \frac{z|E|}{W} - z(z-1) \left(\frac{1}{2} + \frac{t-|E|}{W}\right)^2, & \frac{W}{2} - t < |E| < \frac{W}{2} \\ \frac{\left(\frac{W}{2} - |E|\right)^2 - t^2}{W\left(\frac{W}{2} - |E|\right)}, & \frac{W}{2} + (\sqrt{2} - 1)t < |E| \end{cases}$$

Здесь я не привёл выражений для области $\frac{W}{2} < |E| < \frac{W}{2} + (\sqrt{2} - 1)t$, поскольку там, полученный мной выражения разрывны и не имеют особого смысла.

График плотности состояний $V_0 \langle \nu \rangle(E)$ в модели Андерсона на двух узлах представлен на Рис. 1.1a. Аналитическое выражение для плотности состояний в случае $t < W$ есть (в тексте решения есть выражение для произвольного соотношения)

$$V_0 \langle \nu \rangle(E) = \frac{\theta\left(\frac{W}{2} + t - |E|\right)}{W^2} \begin{cases} W \frac{(W/2)^2 - E^2 - t^2}{(W/2)^2 - E^2}, & |E| < \frac{W}{2} - t \\ \frac{(W/2 + |E|)^2 - t^2}{W/2 + |E|}, & \frac{W}{2} - t < |E| < \sqrt{\left(\frac{W}{2}\right)^2 + t^2} \\ \frac{(W/2 - |E|)^2 - t^2}{W/2 - |E|}, & \sqrt{\left(\frac{W}{2}\right)^2 + t^2} < |E| < \frac{W}{2} + t \end{cases} \quad (1.12)$$

Я предполагаю, что данная формула также даёт точный ответ для одномерной цепочки.

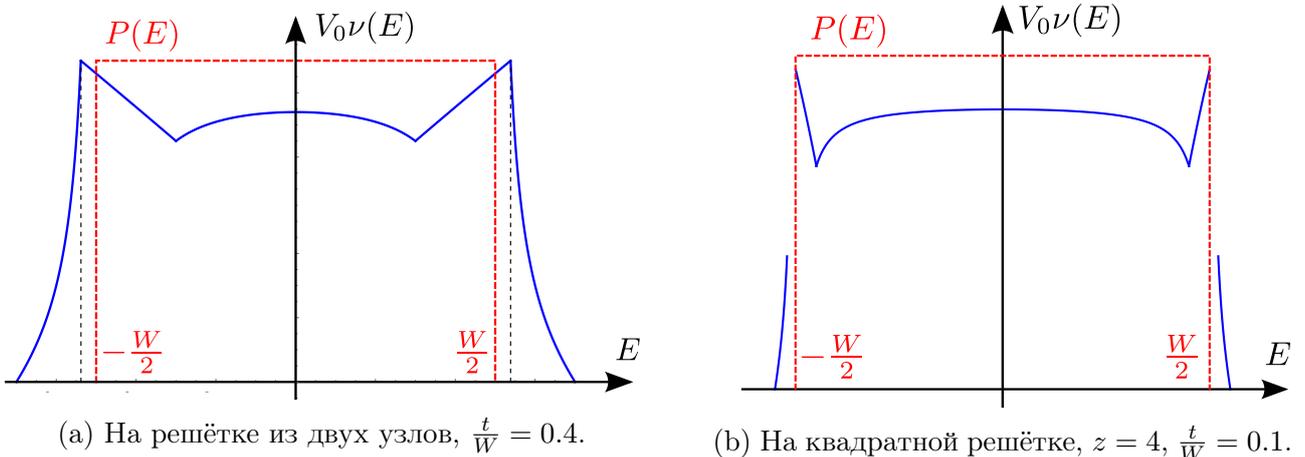


Рис. 1.1: Плотность состояний в модели Андерсона.

Решение задачи 1.2. Сначала разберу случай, когда имеется всего $N = 2$ узла. Хотя на первый взгляд он и лишён смысла, в данном случае ответ можно довести до конца, а также можно спекулировать на тему того, что в пределе $t \ll W$ данный случай должен правильно качественно описывать изменение плотности состояний при включении беспорядка.

Двухузельная модель Андресона В случае, когда узлов всего два, гамильтониан легко диагонализировать.

$$\varepsilon_{12}^{(\pm)} = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + t^2} \equiv \varepsilon_+ \pm \sqrt{\varepsilon_-^2 + t^2}. \quad (1.13)$$

При подсчёте плотности состояний удобно интегрировать по ε_{\pm} , якобиан перехода при этом $J = 2$.

$$\langle \nu \rangle(E) = \frac{1}{V} \int_{-W/2}^{W/2} \frac{d\varepsilon_1}{W} \int_{-W/2}^{W/2} \frac{d\varepsilon_2}{W} \left[\delta(E - \varepsilon_+ - \sqrt{\varepsilon_-^2 + t^2}) + \delta(E - \varepsilon_+ + \sqrt{\varepsilon_-^2 + t^2}) \right] \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{V_0} \int_0^{W/2} \frac{d\varepsilon}{W^2} \left[\theta \left(-\frac{W}{2} + \varepsilon < E - \sqrt{\varepsilon^2 + t^2} < \frac{W}{2} - \varepsilon \right) + \theta \left(-\frac{W}{2} + \varepsilon < E + \sqrt{\varepsilon^2 + t^2} < \frac{W}{2} - \varepsilon \right) \right] \\ &= \frac{1}{V_0} [\Theta(E) + \Theta(-E)], \end{aligned} \quad (1.15)$$

где функция Θ определена как

$$\Theta(E) = \frac{\theta(\frac{W}{2} - E - t)\theta(\frac{W}{2} + E + t)}{W^2} \begin{cases} \frac{(W/2-E)^2-t^2}{W/2-E}, & -\sqrt{(W/2)^2+t^2} < E < \frac{W}{2} - t \\ \frac{(W/2+E)^2-t^2}{W/2+E}, & -W/2 - t < E < -\sqrt{(W/2)^2+t^2} \end{cases} \quad (1.16)$$

График $V_0 \langle \nu \rangle$ приведён на Рис. 1.1a. Его можно сравнить с плотностью состояний в модели Ллойда и увидеть, что имеется качественное сходство.

Модель Андерсона на кубической решётке Малый параметр t/W позволяет разбить фазовое пространство диагональных элементов гамильтониана $\{\varepsilon_i\}$ на области, где возможны попарные равенства узельных энергий и области, где они исключены – объём последних будет в t/W раз меньше.

$$\langle \nu \rangle(E) = \frac{1}{V} \sum_k \int_{-W/2}^{W/2} \prod_{i=1}^N d\varepsilon_i P(\varepsilon_i) \delta(E - \varepsilon_k(\{\varepsilon_i\})) \quad (1.17)$$

$$= \frac{1}{V} \sum_k \int d\varepsilon_i P(\varepsilon_i) \times \prod_{j:\langle ji \rangle}^z \int d\varepsilon_j P(\varepsilon_j) \times \prod_{l:\langle li \rangle}^{N-z-1} \int d\varepsilon_l P(\varepsilon_l) \times \delta(E - \varepsilon_k(\{\varepsilon_i\})) \quad (1.18)$$

$$= \frac{1}{V} \sum_k \int d\varepsilon_i P(\varepsilon_i) \prod_{j:\langle ji \rangle} \left[\int_{|\varepsilon_j - \varepsilon_i| > 2t} + \int_{|\varepsilon_j - \varepsilon_i| < 2t} \right] d\varepsilon_j P(\varepsilon_j) \prod_{l:\langle li \rangle} \int d\varepsilon_l P(\varepsilon_l) \delta(E - \varepsilon_k(\{\varepsilon_i\})) \quad (1.19)$$

$$= \frac{1}{V} \sum_k \int d\varepsilon_i P(\varepsilon_i) \prod_{j:\langle ji \rangle_{|\varepsilon_j - \varepsilon_i| > 2t}} \int d\varepsilon_j P(\varepsilon_j) \prod_{l:\langle li \rangle} \int d\varepsilon_l P(\varepsilon_l) \delta(E - \varepsilon_k(\{\varepsilon_i\})) +$$

$$+ \frac{z}{V} \sum_k \int d\varepsilon_i P(\varepsilon_i) \int_{|\varepsilon_{j_0} - \varepsilon_i| < 2t} d\varepsilon_{j_0} P(\varepsilon_{j_0}) \prod_{j:\langle ji \rangle, j \neq j_0, |\varepsilon_j - \varepsilon_i| > 2t}^{z-1} \int d\varepsilon_j P(\varepsilon_j) \prod_{l:\langle li \rangle} \int d\varepsilon_l P(\varepsilon_l) \delta(E - \varepsilon_k(\{\varepsilon_i\})) \quad (1.20)$$

$$+ \frac{z(z-1)}{2V} \sum_k \int d\varepsilon_i P_i \iint_{\substack{|\varepsilon_{j_1} - \varepsilon_i| < 2t \\ |\varepsilon_{j_2} - \varepsilon_i| < 2t}} d\varepsilon_{j_1} P_{j_1} d\varepsilon_{j_2} P_{j_2} \prod_{j:\langle ji \rangle, j \neq j_1, j_2, |\varepsilon_j - \varepsilon_i| > 2t}^{z-2} \int d\varepsilon_j P(\varepsilon_j) \times \quad (1.21)$$

$$\times \prod_{l:\langle li \rangle} \int d\varepsilon_l P(\varepsilon_l) \delta(E - \varepsilon_k(\{\varepsilon_i\})) + \mathcal{O}\left(\frac{t}{W}\right)^3 \quad (1.22)$$

В последнем равенстве первый член в сумме отвечает основному фазовому объёму $|\varepsilon_i - \varepsilon_j| > 2t$ для всех взаимодействующих i, j . Второй член в сумме описывает «резонансные пары», третий – «резонансные тройки». В первом слагаемом можно найти $\varepsilon_k = \varepsilon_i + \sum_{j:\langle ji \rangle}^z \frac{t^2}{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ по теории возмущений, тогда получится

$$\langle \nu \rangle(E) = \frac{1}{V_0} \int d\varepsilon_i P(\varepsilon_i) \left[\int_{|\varepsilon_j - \varepsilon_i| > 2t} d\varepsilon_j P(\varepsilon_j) \right]^z \delta(E - \varepsilon_i) - \frac{z}{V_0} \int d\varepsilon_i P(\varepsilon_i) \int_{|\varepsilon_j - \varepsilon_i| > 2t} d\varepsilon_j P(\varepsilon_j) \frac{\delta'(E - \varepsilon_i) t^2}{\varepsilon_i - \varepsilon_j} +$$

$$+ \frac{z}{V_0} \int d\varepsilon_i P(\varepsilon_i) \int_{|\varepsilon_{j_0} - \varepsilon_i| < 2t} d\varepsilon_{j_0} P(\varepsilon_{j_0}) \delta(E - \varepsilon_k) \left[1 - \int_{|\varepsilon_j - \varepsilon_i| < 2t} d\varepsilon_j P(\varepsilon_j) \right]^{z-1} +$$

$$+ \frac{z(z-1)}{2V_0} \int d\varepsilon_i \int_{O_{2t}(\varepsilon_i)} d\varepsilon_{j_1} \int_{O_{2t}(\varepsilon_i)} d\varepsilon_{j_2} P_{j_1} P_{j_2} \delta(E - \varepsilon_i) \left[1 - \int_{|\varepsilon_j - \varepsilon_i| < 2t} d\varepsilon_j P(\varepsilon_j) \right]^{z-2}. \quad (1.23)$$

Итак, с точностью до $\mathcal{O}(t^3/W^3)$ плотность состояний записывается как

$$\langle \nu \rangle(E) = \frac{P(E)}{V_0} [1 - zg(E) - zf(E) - z(z-1)f^2(E)] + \frac{zh(E)}{V_0}, \quad (1.24)$$

где g — это член с производной δ -функции, равный

$$\begin{aligned} g(E) &= P(E)^{-1} \int d\varepsilon_i P(\varepsilon_i) \int_{|\varepsilon_j - \varepsilon_i| > 2t} d\varepsilon_j P(\varepsilon_j) \frac{\delta'(E - \varepsilon_i) t^2}{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \frac{\partial}{\partial E} \int_{|\varepsilon - E| > 2t} \frac{t^2 P(\varepsilon)}{E - \varepsilon} d\varepsilon = \\ &= \frac{t^2}{W} \frac{\partial}{\partial E} \left\{ \begin{array}{ll} \ln \frac{W/2+E}{2t}, & E > \frac{W}{2} - t \\ \ln \frac{W/2+E}{W/2-E}, & |E| < \frac{W}{2} - t \\ \ln \frac{2t}{W/2-E}, & E < -\frac{W}{2} + t \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{t^2/W}{W/2+|E|}, & |E| > \frac{W}{2} - t \\ \frac{t^2}{(W/2)^2 - E^2}, & |E| < \frac{W}{2} - t \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Получилась разрывная функция, это неверно. Переопределию её следующим образом

$$\tilde{g}(E) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{t^2/W}{W/2+|E|} + \frac{t}{W}, & |E| > \frac{W}{2} - t \\ \frac{t^2}{(W/2)^2 - E^2}, & |E| < \frac{W}{2} - t \end{array} \right\}. \quad (1.26)$$

Через f я обозначил

$$f(E) = \int_{|\varepsilon - E| < 2t} d\varepsilon P(\varepsilon) = \frac{\theta(\frac{W}{2} + t - |E|)}{W} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{W}{2} + t - |E|, & |E| > \frac{W}{2} - t \\ 2t, & |E| < \frac{W}{2} - t \end{array} \right\}. \quad (1.27)$$

А функция $h(E)$ — обрзанная функция $\Theta(E) + \Theta(-E)$ из (1.14).

$$h(E) = \int d\varepsilon_i P(\varepsilon_i) \int_{|\varepsilon_j - \varepsilon_i| < 2t} d\varepsilon_j P(\varepsilon_j) \delta(E - \varepsilon[\varepsilon_i, \varepsilon_j]) \quad (1.28)$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{|\varepsilon_j - \varepsilon_i| < 2t} d\varepsilon_i P(\varepsilon_i) d\varepsilon_j P(\varepsilon_j) \left[\delta\left(E - \varepsilon_{ij}^{(+)}\right) + \delta\left(E - \varepsilon_{ij}^{(-)}\right) \right] \quad (1.29)$$

$$= \int_{-t}^t \frac{d\varepsilon_-}{W} \int_{-\frac{W}{2} + |\varepsilon_-|}^{\frac{W}{2} - |\varepsilon_-|} \frac{d\varepsilon_+}{W} \left[\delta\left(E - \varepsilon_+ - \sqrt{\varepsilon_-^2 + t^2}\right) + \delta\left(E - \varepsilon_+ + \sqrt{\varepsilon_-^2 + t^2}\right) \right] \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} &= 2 \int_0^t \frac{d\varepsilon}{W^2} \left[\theta\left(-\frac{W}{2} + \varepsilon < E - \sqrt{\varepsilon^2 + t^2} < \frac{W}{2} - \varepsilon\right) + \theta\left(-\frac{W}{2} + \varepsilon < E + \sqrt{\varepsilon^2 + t^2} < \frac{W}{2} - \varepsilon\right) \right] \\ &= \frac{\theta(\frac{W}{2} + t - |E|)}{W^2} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(\frac{W}{2} - |E|)^2 - t^2}{\frac{W}{2} - |E|}, & |E| > \frac{W}{2} + (\sqrt{2} - 1)t \\ 2t, & |E| < \frac{W}{2} + (\sqrt{2} - 1)t \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (1.31)$$

осталось только собрать всё вместе.

Плотность состояний в модели Ллойда

Моделью Ллойда называется модель Андерсона с распределением вероятностей для узельных энергий, заданным функцией Лоренца (1.2). Модель Ллойда замечательна тем, что плотность состояний в ней может быть найдена точно.

Рассмотрю точную (запаздывающую) функцию Грина $G_{ij} = G_{ij}(E; \{\varepsilon_k\})$, отвечающую распределению $\{\varepsilon_k\}$ и функцию Грина $G_{ij}^{(0)}$ с набором энергий, отличающимся только в значении некоторого $\varepsilon_{i_0} = 0$.

$$\begin{aligned} G_{ij}(E) &= \langle i | (E - \hat{H})^{-1} | j \rangle = \langle i | (E - \hat{H}^{(0)} - \varepsilon_{i_0} \hat{c}_{i_0}^+ \hat{c}_{i_0})^{-1} | j \rangle = \\ &= G_{ij}^{(0)} + G_{i i_0}^{(0)} \varepsilon_{i_0} G_{i_0 i}^{(0)} + G_{i i_0}^{(0)} \varepsilon_{i_0} G_{i_0 i_0}^{(0)} \varepsilon_{i_0} G_{i_0 j}^{(0)} + \dots = G_{ij}^{(0)} + G_{i i_0}^{(0)} \frac{\varepsilon_{i_0}}{1 - \varepsilon_{i_0} G_{i_0 i_0}^{(0)}} G_{i_0 j}^{(0)}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Произведу усреднение по ε_{i_0} с лоренцевой функцией распределения $P(E)$.

$$\int \frac{d\varepsilon}{\pi} \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon G_{i_0 i_0}^{(0)}} \frac{\Gamma}{\varepsilon^2 + \Gamma^2} = -2\pi i \operatorname{res}_{\varepsilon = -i\Gamma} = \frac{-i\Gamma}{1 - (-i\Gamma) G_{i_0 i_0}^{(0)}} \quad (1.33)$$

где я воспользовался тем, что функция Грина — запаздывающая, поэтому $\operatorname{Im} G^{-1} = +0$, и замкнул контур интегрирования в нижней полуплоскости.

$$\langle \hat{G}_E^{(R)} \rangle_{\varepsilon_{i_0}} = (E - \hat{H}^{(0)} - (-i\Gamma) \hat{c}_{i_0}^+ \hat{c}_{i_0})^{-1} \quad (1.34)$$

Полученное выражение для G_{ij} формально отвечает замене $\varepsilon_{i_0} \mapsto -i\Gamma$ в гамильтониане. Усреднение по остальным энергиям приводит к функции Грина без беспорядка, у которой все «энергии» имеют конечную мнимую часть $\varepsilon \mapsto \varepsilon - i\Gamma$.

$$\langle \hat{G}_E^{(R)} \rangle_{\{\varepsilon_i\}} = (E - \hat{H}^{(0)} + i\Gamma)^{-1} \quad (1.35)$$

Согласно определению (1.3) усреднённая плотность состояний суть

$$\langle \nu \rangle(E) = \frac{-1}{\pi} \operatorname{Im} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \langle \hat{G}_E^{(R)}(\mathbf{k}) \rangle_{\{\varepsilon_i\}} = \frac{-1}{\pi} \int \frac{d^d \mathbf{k}}{(2\pi)^d} \operatorname{Im} \frac{1}{E - \varepsilon(\mathbf{k}) + i\Gamma}, \quad (1.36)$$

где $\varepsilon(\mathbf{k})$ — закон дисперсии в отсутствие беспорядка ($\Gamma = 0$). Данный интеграл (1.36) может быть вычислен точно в размерности $d = 1$ (смотри задачу 1.4). Можно также получить некоторые общие свойства исследуя его асимптотики (смотри задачу 1.3).

К сожалению, другие физические величины, скажем, проводимость, не могут быть найдены с помощью такого же метода, поскольку выражения для них содержат произведения вида $G^{(R)} G^{(A)}$, для которых усреднение по энергии ε_i не может быть произведено.

Задачи

Задача 1.3. Преобразовать выражение (1.36) при $\Gamma \ll t$ к виду

$$\nu(E) \sim \nu_d(E) + \frac{\Gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\nu_d(\varepsilon) - \nu_d(E)}{(\varepsilon - E)^2} d\varepsilon, \quad \Gamma \ll t. \quad (1.37)$$

Также найти асимптотику (1.36) при $t^2 \ll E^2 + \Gamma^2$.

Решение задачи 1.3. Разложение по малости $\Gamma \ll t$ производится следующим образом.

$$\nu(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{\pi} \frac{\nu_d(\varepsilon)\Gamma}{(\varepsilon - E)^2 + \Gamma^2} = \nu_d(E) + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{\pi} \frac{\Gamma(\nu_d(\varepsilon) - \nu_d(E))}{(\varepsilon - E)^2 + \Gamma^2} \quad (1.38)$$

В последнем интеграле, можно выбросить вклад от окрестности $\varepsilon \sim E$, поскольку он имеет второй порядок малости по беспорядку.

$$\int_{(E)} \frac{d\varepsilon}{\pi} \frac{\Gamma(\nu_d(\varepsilon) - \nu_d(E))}{(\varepsilon - E)^2 + \Gamma^2} = \int_{-\#\Gamma}^{\#\Gamma} \frac{d\varepsilon/\pi}{\varepsilon^2 + 1} \left(\Gamma\varepsilon\nu'_d(E) + \Gamma^2\frac{\varepsilon^2}{2}\nu''_d(E) + \dots \right) \sim \text{const} \cdot \Gamma^2\nu''_d(E), \quad \Gamma \ll t, \quad (1.39)$$

поскольку пределы интегрирования симметричны. В главном порядке прихожу к (1.37)

При $E^2 + \Gamma^2 \gg t^2$, имеется универсальное поведение плотности состояний.

$$\nu(E) = \int \frac{d\varepsilon}{\pi} \frac{\nu_d(\varepsilon)\Gamma}{(\varepsilon - E)^2 + \Gamma^2} \sim \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma}{E^2 + \Gamma^2} \int \nu_d(\varepsilon) d\varepsilon + \mathcal{O}\left(\frac{Et}{E^2 + \Gamma^2}\right)^2, \quad E^2 + \Gamma^2 \gg t^2. \quad (1.40)$$

Т. е. воспроизводится уже известный результат, что плотность состояний повторяет профиль распределения $\nu(E) \sim P(E)$, при малой амплитуде перескока $t \ll E$, либо $t \ll \Gamma$.

Задача 1.4. Вычислить интеграл (1.36) в одномерии, когда $\varepsilon(k) = 2t \cos ka$, $t > 0$.

Ответ к задаче 1.4.

$$\nu(E) = \frac{1}{\pi V_0 t} \operatorname{Im} \frac{\operatorname{sgn}(E)}{z - 1/z}, \quad z = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad 2\beta t = E + i\Gamma. \quad (1.41)$$

Решение задачи 1.4. Замена переменной интегрирования на $z = e^{ik}$ позволяет взять интеграл по теореме Коши о вычетах. Введу обозначения $\epsilon = E/t$, $\gamma = \Gamma/t$, $2\beta = \epsilon + i\gamma$.

$$\nu(E) = \frac{\gamma}{\pi V_0 t} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{2\pi i} \frac{1/z}{((z + \frac{1}{z}) - \epsilon)^2 + \gamma^2}. \quad (1.42)$$

Знаменатель интегрируемой функции имеет четыре нуля, в точках $z_{\pm} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1}$ и \bar{z}_{\pm} . При $\epsilon > 0$ нули z_- и \bar{z}_- лежат внутри единичной окружности и определяют значение интеграла, при $\epsilon < 0$, интеграл равен сумме вычетов в z_+ , \bar{z}_+ . Дифференцируя знаменатель, нахожу

$$\nu(E) = \frac{1}{\pi V_0 t} \operatorname{Im} \frac{\operatorname{sgn}(E)}{z_- - 1/z_-} \quad (1.43)$$

Анализ полученной формулы позволяет установить вид зависимости $\nu(E)$. График изображён ниже в сравнении с плотностью состояний в отсутствие беспорядка.

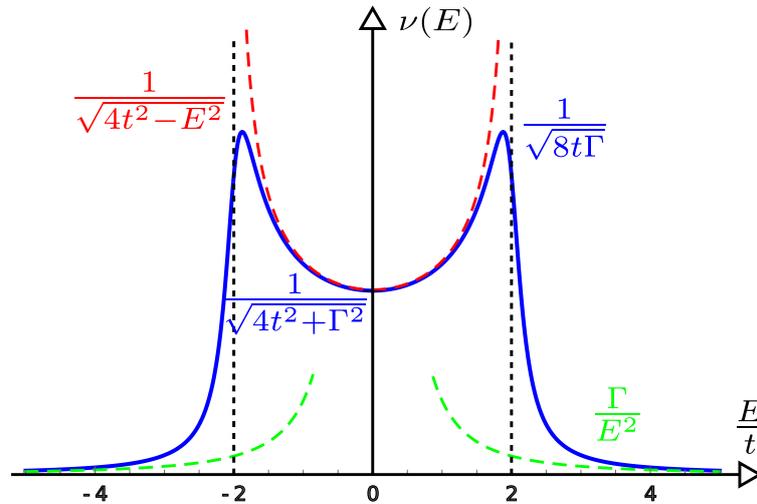


Рис. 1.2: График плотности состояний в модели Ллойда (синий) с параметрами $t = 1$, $\gamma = 1/5$ в единицах $(\pi V_0)^{-1}$ в сравнении с плотностью состояний чистого металла (красный) и высокоэнергетической асимптотикой (зелёный).

**Непрерывный предел модели Андерсона.
Метод оптимальной флуктуации.**

Задачи

Задача 1.5. Получить и исследовать дискретный аналог нелинейного уравнения Шрёдингера, рассмотрев задачу о плотности состояний в модели Андерсона в терминах прыжкового гамильтониана в приближении оптимальной флуктуации.

Решение задачи 1.5.

2 Прыжковая проводимость

Прыжковая проводимость. Магнетосопротивление ($d = 2$)

Прыжковая проводимость определяется поведением волновых функций локализованных на примесях. С экспоненциальной точностью $\psi(\mathbf{r})$ состояния локализованного на примеси с заданной энергией, можно найти в квазиклассическом приближении.

$$\psi(\mathbf{r}) \propto \int dt e^{i\varepsilon t} \int_{(0,0)}^{(\mathbf{r},t)} \mathcal{D}[\mathbf{r}] e^{iS[\mathbf{r}]} \sim \int_{(0,0)}^{(\mathbf{r},\varepsilon)} \mathcal{D}[\mathbf{r}] e^{i\tilde{S}[\mathbf{r}]}, \quad (2.1)$$

где взятие интеграла по t в перевальном приближении привело к укороченному действию \tilde{S} на заданной энергии ε , вычислю его для частицы, живущей в плоскости (x, y) в магнитном поле $\mathbf{B} \parallel Oz$. Сначала буду считать энергию положительной, затем положу $\varepsilon \mapsto -|\varepsilon|$, $t \mapsto -it$.

Действие электрона в магнитном поле $\mathbf{B} = -mc\omega/|e|$, $e = -|e|$ суть

$$S = \frac{m}{2} \int_0^t \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \omega(y\dot{x} - x\dot{y}) dt. \quad (2.2)$$

Классическая траектория может быть записана как

$$\ddot{\mathbf{r}} = [\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}] \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m\omega^2}} \begin{pmatrix} \sin \omega t & \cos \omega t - 1 \\ 1 - \cos \omega t & \sin \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

где я учёл нулевые начальные условия, а параметры φ (угол направления начальной скорости) и t (общее время движения) определяются из правого граничного условия. А именно, обращая матрицу нахожу

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{m\omega^2/2\varepsilon}}{2 \sin \frac{\omega t}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\omega t}{2} & \sin \frac{\omega t}{2} \\ -\sin \frac{\omega t}{2} & \cos \frac{\omega t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \quad \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \frac{m\omega^2 r^2}{8\varepsilon \sin^2 \frac{\omega t}{2}} \quad \Rightarrow \quad \sin \frac{\omega t}{2} = \sqrt{\frac{m\omega^2 r^2}{8\varepsilon}}. \quad (2.5)$$

Отсюда же нахожу траекторию в промежуточный момент времени

$$\begin{pmatrix} x(\tau) \\ y(\tau) \end{pmatrix} = \frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\sin \frac{\omega t}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\omega \tau}{2} & -\sin \frac{\omega \tau}{2} \\ \sin \frac{\omega \tau}{2} & \cos \frac{\omega \tau}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\omega t}{2} & \sin \frac{\omega t}{2} \\ -\sin \frac{\omega t}{2} & \cos \frac{\omega t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Укороченное действие на такой траектории равно

$$\tilde{S}(\mathbf{r}; \varepsilon, \omega) = \frac{m\omega}{4} r^2 \operatorname{ctg} \frac{\omega t}{2} = \frac{m\omega r^2}{4} = \frac{\sqrt{2m\varepsilon}}{2} r \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 r^2}{8\varepsilon}}. \quad (2.7)$$

Совершая евклидов поворот, нахожу, как затухает волновая функция локализованного состояния.

$$\psi(\mathbf{r}) \sim \exp \left(-\frac{r}{a} \sqrt{1 + \left(\frac{m\omega r a}{4\hbar} \right)^2} \right), \quad (2.8)$$

где $a = 2\hbar/\sqrt{2m|\varepsilon|}$, $\omega = |e|B/mc$. Линии постоянного действия $S = \hbar\xi/2$ задают окружность радиуса

$$R(S) = \frac{4}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{m\omega a} \sqrt{\sqrt{1 + (2Sm\omega a^2/4\hbar^2)^2} - 1} = \frac{a/\beta}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + (\beta\xi)^2} - 1}, \quad (2.9)$$

где я обозначил через $\beta = m\omega a^2/4\hbar = (a/l_B)^2$ — безразмерное магнитное поле, $l_B = \sqrt{\hbar c/|e|B}$ — магнитная длина. Теперь следует включить перколяцию. Мы считаем, что проводимость определяется критическим значением ξ_c , которое находится из соотношения

$$\pi R^2 \left(\frac{\hbar}{2} \xi_c \right) = \frac{B_{\text{cr}}}{n}, \quad (2.10)$$

где n — концентрация допантов, а число $B_{\text{cr}}|_{d=2} \approx 4$ известно из численного эксперимента.

Ответ Итак, проводимость $\sigma \sim \exp(-\xi_c)$, где

$$\xi_c = \frac{l_B^2}{a^2} \sqrt{\left(1 + \frac{2B_{cr}a^2}{\pi l_B^4 n}\right)^2 - 1} \sim \begin{cases} \sqrt{\frac{4B_{cr}}{\pi n_D a^2}} \left(1 + \frac{B_{cr}a^2}{2\pi l_B^4 n}\right), & B \ll B_c \\ 2B_{cr}/\pi n l_B^2 \propto B, & B \ll B_c \end{cases} \quad (2.11)$$

а характерное поле $B_c \sim \hbar c \sqrt{n}/|e|a$, $a = 2\hbar/\sqrt{2m|\varepsilon|}$.

Список литературы

[1] P.W. Anderson, [Phys. Rev.](#) 109 (1958) 1492.