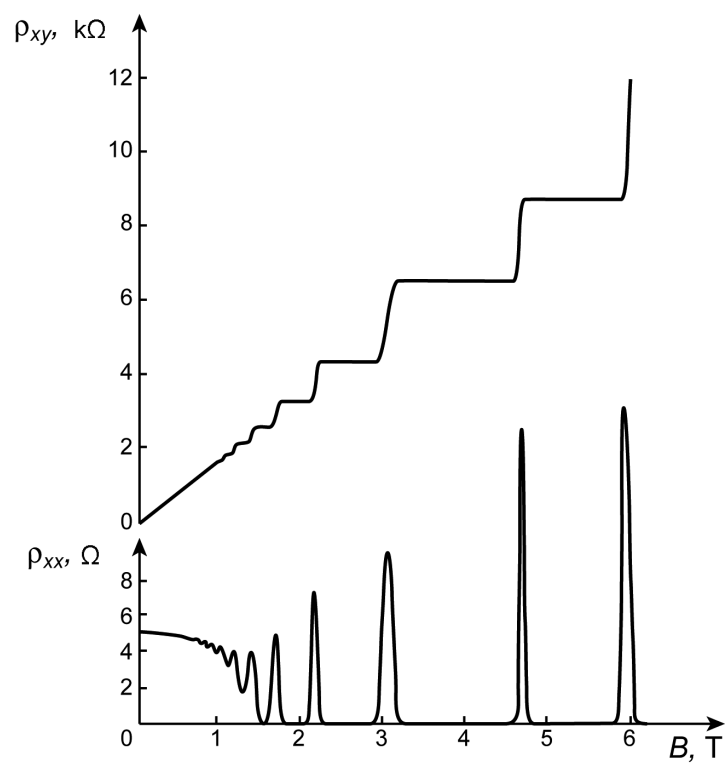


Задачи к курсу лекций  
«Целочисленный квантовый эффект Холла»



Сайкин Давид  
mailto: [saykind@itp.ac.ru](mailto:saykind@itp.ac.ru)

Последняя компиляция: 29 марта 2018 г.

All of physics is either impossible or trivial. It is impossible until you understand it, and then it becomes trivial.

---

Ernest Rutherford

## Содержание

### 2 Краевые состояния

2.2. Скорость краевых состояний . . . . .

### 4 2DEG с редкими примесями в магнитном поле

4.3. Две примеси . . . . .

### 6 Самосогласованное борновское приближение

6.1. Матричный элемент случайного потенциала . . . . .

### 10 Сигма-модель и другие непонятные вещи

10.2.  $\sigma_{xx}$  в регуляризации Паули-Виларса . . . . .

10.5.  $\sigma_{xx}$  в регуляризации Паули-Виларса . . . . .

10.7. Интеграл с полиномами Якоби . . . . .

### Список литературы

## 2 Краевые состояния

### Задачи

**Задача 2.2.** Для электронных состояний на двумерной полоске  $-W/2 \leq x \leq W/2$  в магнитном поле  $\mathbf{B} \parallel Oz$  найти спектральную скорость  $v_{\text{edge}}^y = \partial \varepsilon / \partial p_y$  в точках  $k = \pm W/2l_B^2$ .

**Решение задачи 2.2.** Волновая функция электрона в магнитном поле имеет вид

$$\psi(x = \xi l_B - k_y l_B^2) = \chi_\nu(w - k) \chi_\nu(\xi) - \chi_\nu(-w + k) \chi_\nu(-\xi),$$

при условии, что  $\nu$  определяется из уравнения

$$\chi_\nu(w - k) \chi_\nu(w + k) = \chi_\nu(-w + k) \chi_\nu(-w - k), \quad (2.1)$$

где я обозначил  $\xi = x l_B^{-1} + k_y l_B$ ,  $k = k_y l_B$ ,  $w = W/2l_B$ ,  $l_B = \sqrt{\hbar c / |e| B}$ , функцию  $\chi_\nu$  я называю физической функцией параболического цилиндра  $\chi_\nu(\xi) = e^{-\xi^2/2} H_\nu(\xi) = 2^{\nu/2} D_\nu(\sqrt{2}\xi)$ . Функция Эрмита имеет асимптотики<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} H_\nu(\xi) &= \frac{\nu!}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0)} \frac{dt}{t^{\nu+1}} e^{2\xi t - t^2} \sim \begin{cases} (2\xi)^\nu, & \xi \rightarrow +\infty \\ (-2\xi)^\nu \cos \pi\nu + \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(-\nu)} \frac{e^{\xi^2}}{(-\xi)^{\nu+1}}, & \xi \rightarrow -\infty \end{cases} \\ H_\nu(\xi) &= \frac{2^\nu \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})} {}_1F_1\left(\frac{-\nu}{2}, \frac{1}{2}; \xi^2\right) - \frac{2^{\nu+1} \sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{-\nu}{2})} {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; \xi^2\right) \xi \\ &= 2^\nu \sqrt{\pi} \left( \frac{1}{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})} - \frac{2\xi}{\Gamma(\frac{-\nu}{2})} + \mathcal{O}(\xi^2) \right), \quad \xi \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Замечу, что для любых  $k$  натуральное  $\nu = n$  решает уравнение (2.1).

Решая уравнение (2.1) с использованием (2.2) при  $w \ll 1$ ,  $k$  нахожу

$$\begin{aligned} \nu_n &\approx n + \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi} n!} (w^2 - k^2)^{n+\frac{1}{2}} e^{-w^2 - k^2} \operatorname{ch} \left[ 2wk + \left( n + \frac{1}{2} \right) \ln \frac{w - k}{w + k} \right] \\ &\approx n + \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi} n!} w^{2n+1} e^{-w^2} (1 + 2w^2 k^2). \end{aligned}$$

Видно, что при  $k \ll w$  энергия экспоненциально мало отличается натурального числа  $\nu_n \approx n$ .

Оказывается, что при  $\nu_n(k = \pm w) = 2n + 1$ . Линейная поправка находится из (2.1) разложением при  $|k \pm w| \ll 1$  и  $w \gg 1$ , причём из-за наличия большой экспоненты в  $\chi_\nu(-w - k)$  с экспоненциальной точностью достаточно удовлетворить

$$\chi_\nu(k - w) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 = 2 \frac{\Gamma(\frac{1-\nu}{2})}{\Gamma(\frac{-\nu}{2})} \Delta k \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{d\nu_n}{dk} \right|_{k=\pm w} = \frac{\pm 4/n!}{|\Gamma(-\frac{1}{2} - n)|}.$$

В размерных единицах

$$\boxed{v_{\text{edge}}^y(k_y = \pm W/2l_B^2) = \frac{\pm 4\hbar/ml_B}{n! |\Gamma(-\frac{1}{2} - n)|}}.$$

<sup>1</sup>Если Вам интересно, почему я пишу маленькую экспоненту на фоне ошибки большой и как строго доказать, что на отрицательной полуоси там  $\cos \pi\nu$ , спросите меня лично — это интересная, но долгая история.

## 4 2DEG с редкими примесями в магнитном поле

### Задачи

**Задача 4.3.** Найти энергии отщепленных состояний на нижнем уровне Ландау при наличии двух слабых  $\delta$ -центров с силами  $u_1$  и  $u_2$ , расположенных на расстоянии  $d$  друг от друга, при  $u_{1,2} \ll l_H^2 \omega_c$ .

**Решение задачи 4.3.** *Общая идея:*

В лекциях была выведена, в указанных предположениях, энергия отщеплённого состояния на единственной примеси  $\varepsilon_1 = \frac{\omega_c}{2} + u_1 n_L$ , где  $n_L = (2\pi l_H)^2$  — доля площади, приходящаяся на одно состояние Ландау. Если теперь имеется две примеси с силами  $u_{1,2}$ , расположенные далеко друг от друга, то в главном порядке по  $l_H \ll d$  энергия каждой есть  $\varepsilon_{1,2} = \frac{\omega_c}{2} + n_L u_{1,2}$ . При сближении примесей состояния гибридизуются, причём туннельный элемент может быть оценён с экспоненциальной точностью как

$$t \sim \int e^{-x^2/2} e^{-(x-dl_H^{-1})^2/2} \frac{dx}{\sqrt{\pi}} = e^{-d^2/4l_H^2}$$

Тогда энергии отщеплённых уровней будут определяться как собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\omega_c}{2} + n_L u_1 & n_L u_2 t \\ n_L u_1 t & \frac{\omega_c}{2} + n_L u_2 \end{pmatrix} \quad \varepsilon_{1,2} = \frac{\omega_c}{2} + n_L \frac{u_1 + u_2}{2} \pm n_L \sqrt{\left(\frac{u_1 - u_2}{2}\right)^2 + u_1 u_2 e^{-d^2/2l_H^2}} \quad (4.1)$$

*Собственно, решение:*

Следуя изложению лекции, рассмотрим интегральное уравнение

$$\psi(\mathbf{r}) = \int G_\varepsilon^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}'$$

с потенциалом

$$V(\mathbf{r}) = u_1 \delta(\mathbf{r}) + u_2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{d}).$$

Направлю ось  $y$  по прямой, соединяющей примеси и запишу невозмущённую функцию Грина в базисе функций в калибровке Ландау.

$$\psi_{nk}(\mathbf{r}) = \frac{e^{iky}}{\sqrt{L_y}} \frac{\chi_n(x l_H^{-1} - k l_H)}{\sqrt{l_H}}, \quad \chi_n(x) = \frac{e^{-x^2/2} H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}.$$

Причём в исследуемом пределе  $\omega_c \gg u_{1,2} n_L$  достаточно рассмотреть, только функции, принадлежащие нулевому уровню Ландау.

$$G_\varepsilon^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{n,k} \frac{\psi_{nk}^*(\mathbf{r}) \psi_{nk}(\mathbf{r}')}{\varepsilon - \omega_c(n + \frac{1}{2})} \approx \sum_k \frac{\psi_k^*(\mathbf{r}) \psi_k(\mathbf{r}')}{\varepsilon - \omega_c/2}.$$

Запишу интегральное уравнение при  $\mathbf{r} = 0$  и  $\mathbf{r} = \mathbf{d}$ .

$$\begin{aligned} \psi(0) &= G_\varepsilon^0(0, 0) u_1 \psi(0) + G_\varepsilon^0(0, \mathbf{d}) u_1 \psi(\mathbf{d}), \\ \psi(\mathbf{d}) &= G_\varepsilon^0(\mathbf{d}, 0) u_1 \psi(0) + G_\varepsilon^0(\mathbf{d}, \mathbf{d}) u_1 \psi(\mathbf{d}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Вычислю функции Грина в указанных точках.

$$\begin{aligned} G_\varepsilon^0(\mathbf{r}, \mathbf{r}) &= \sum_n \frac{1}{\varepsilon - \omega_c(n + \frac{1}{2})} \int \frac{L_y dk}{2\pi} \frac{\chi_n^2(x l_H^{-1} - k l_H)}{L_y l_H} = \sum_n \frac{n_L}{\varepsilon - \omega_c(n + \frac{1}{2})}, \\ G_\varepsilon^0(0, \mathbf{d}) &= \sum_n \frac{n_L}{\varepsilon - \omega_c(n + \frac{1}{2})} \int dk \chi_n^2(k) e^{ikd/l_H} = \sum_n \frac{n_L e^{-d^2/4l_H^2} L_n\left(\frac{d^2}{2l_H^2}\right)}{\varepsilon - \omega_c(n + \frac{1}{2})}, \end{aligned}$$

где  $L_n$  — полиномы Лаггера,  $L_0 \equiv 1$ . Видно, что если оставить только нулевой уровень Ландау, система (4.2) приводит в точности к ответу (4.1).

## 6 Самосогласованное борновское приближение

### Задачи

**Задача 6.1.** Выразить матричные элементы потенциала  $V(\mathbf{r})$  в базисе двумерных осцилляторных функций в калибровке Ландау

$$\langle n_1, k_1 | \hat{V} | n_2, k_2 \rangle = \int d^2\mathbf{r} \psi_{n_1 k_1}^*(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \psi_{n_2 k_2}(\mathbf{r})$$

$$\psi_{nk}(\mathbf{r}) = \frac{e^{iky}}{\sqrt{L_y}} \frac{\chi_n(x l_H^{-1} - k l_H)}{\sqrt{l_H}}, \quad \chi_n(x) = \frac{e^{-x^2/2} H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

через интеграл от фурье-образа  $\tilde{V}(\mathbf{q})$  и присоединённый полином Лаггера  $L_{n_1}^{n_2-n_1}$ .

**Решение задачи 6.1.** После преобразования фурье потенциала

$$V(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{q}} \frac{e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{L} \tilde{V}_{\mathbf{q}},$$

становится ясно,

$$\langle n_1, k_1 | \hat{V} | n_2, k_2 \rangle = \int \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} \tilde{V}(\mathbf{q}) \langle n_1, k_1 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | n_2, k_2 \rangle,$$

что суть задачи заключается в вычислении матричных элементов

$$\langle n_1, k_1 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | n_2, k_2 \rangle = \langle k_1 | e^{iq_y \hat{y}} | k_2 \rangle \langle \chi_{n_1}^{k_1} | e^{iq_x \hat{x}} | \chi_{n_2}^{k_2} \rangle,$$

где первый сомножитель

$$\langle k_1 | e^{iq_y \hat{y}} | k_2 \rangle = \langle k_1 | k_2 + q_y \rangle = \frac{2\pi}{L} \delta(k_2 + q_y - k_1) = \delta_{k_2+q_y}^{k_1},$$

а второй выражается через полиномы Лаггера. Чтобы увидеть это достаточно воспользоваться основным представлением полиномов Эрмита.

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^{n+k}] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0)} \frac{dt}{t^{n+1}} (1+t)^{n+k} e^{-xt}, \quad H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{(0)} \frac{dt}{t^{n+1}} e^{-t^2+2xt}.$$

Полагая, для краткости,  $p = q_x l_H$ ,  $r = q_y l_H$ ,  $p_1 = k_1 l_H$ ,  $p_2 = k_2 l_H$ , учитывая  $r = p_1 - p_2$ , вычисляю

$$\begin{aligned} \langle \chi_{n_1}^{k_1} | e^{iq_x \hat{x}} | \chi_{n_2}^{k_2} \rangle &= \int dx \chi_{n_1}(x - p_1) e^{ipx} \chi_{n_2}(x - p_2) = e^{ipp_2} \int dx \chi_{n_1}(x - r) e^{ipx} \chi_{n_2}(x) \\ &= e^{ipp_2} \sqrt{\frac{n_1! n_2!}{2^{n_1+n_2} \pi}} \frac{e^{-r^2/2}}{(2\pi i)^2} \int dx e^{-x^2+rx+ipx} \oint \frac{dt}{t^{n_1+1}} e^{-t^2+2(x-r)t} \oint \frac{ds}{s^{n_2+1}} e^{-s^2+2xs} \\ &= e^{ip(p_1+p_2)/2} \sqrt{\frac{n_1! n_2!}{2^{n_1+n_2}}} \frac{e^{-(p^2+r^2)/4}}{(2\pi i)^2} \oint \frac{dt}{t^{n_1+1}} e^{(ip-r)t} \oint \frac{ds}{s^{n_2+1}} e^{(2t+ip+r)s} \\ &= e^{ip(p_1+p_2)/2} \sqrt{\frac{n_1! / n_2!}{2^{n_1-n_2}}} \frac{e^{-(p^2+r^2)/4}}{2\pi i} \oint \frac{dt}{t^{n_1+1}} e^{(ip-r)t} \left( t + \frac{ip+r}{2} \right)^{n_2} \\ &= e^{ip(p_1+p_2)/2} \sqrt{\frac{n_1!}{n_2!}} \left( \frac{ip+r}{\sqrt{2}} \right)^{n_2-n_1} \frac{e^{-(p^2+r^2)/4}}{2\pi i} \oint \frac{dt}{t^{n_1+1}} e^{-(p^2+r^2)t/2} (t+1)^{n_2} \\ &= e^{ip(p_1+p_2)/2} \sqrt{\frac{n_1!}{n_2!}} \left( \frac{ip+r}{\sqrt{2}} \right)^{n_2-n_1} e^{-(p^2+r^2)/4} \cdot L_{n_1}^{n_2-n_1} \left( \frac{p^2+r^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Окончательно,

$$\langle n_1, k_1 | \hat{V} | n_2, k_2 \rangle = \sum_{\mathbf{q}} \frac{\tilde{V}_{\mathbf{q}}}{L} \delta_{k_2+q_y}^{k_1} e^{iq_x(k_1+k_2)l_H^2/2} \sqrt{\frac{n_1!}{n_2!}} \left( \frac{iq_x + q_y}{\sqrt{2}l_H^{-1}} \right)^{n_2-n_1} \exp\left(-\frac{q^2 l_H^2}{4}\right) L_{n_1}^{n_2-n_1} \left( \frac{q^2 l_H^2}{2} \right).$$

## 10 Сигма–модель и другие непонятные вещи

**Задача 10.2.** Вычислить однопетлевую поправку к  $\sigma_{xx}$ , используя регуляризацию Паули–Вилларса.

**Ответ к задаче 10.2.**

$$\sigma_{xx} = \bar{\sigma}_{xx} \left[ 1 - \frac{n}{\pi \bar{\sigma}_{xx}} \ln M \right].$$

**Решение задачи 10.2.** Согласно формуле (332) лекций

$$\sigma_{xx} = \bar{\sigma}_{xx} \left[ 1 - \frac{2n}{\bar{\sigma}_{xx}} \int q^2 D^2(q) (dq) \right], \quad D(q) = \frac{1}{q^2 + h^2}, \quad h^2 = 4\pi\bar{\nu}/\bar{\sigma}_{xx}.$$

Согласно процедуре Паули–Вилларса, для регуляризации интеграла

$$\int q^2 D^2(q) \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} = \frac{1}{2\pi} \int \frac{q^3 dq}{(q^2 + h^2)^2}$$

нужно рассмотреть сумму

$$f(h, L, \{M_f\}, \{e_f\}) = \sum_{f=0}^k e_f \int_0^L \frac{q^3 dq}{(q^2 + h^2 + M_f^2)^2}$$

где  $e_0 = 1$ ,  $M_0 = 0$ , в пределе  $L \gg M_f \gg 1$ .

$$f(h, L, \{M_f\}, \{e_f\}) = \sum_{f=0}^k \frac{e_f}{2} \left[ \ln \frac{L^2 + h^2 + M_f^2}{h^2 + M_f^2} - \frac{L^2}{L^2 + h^2 + M_f^2} \right] \sim \sum_{f=0}^k \frac{e_f}{2} [\ln L^2 - \ln (h^2 + M_f^2) - 1]$$

Числа  $e_f$  выбираются таким образом, чтобы избавить от зависимости выражения для  $f$  от  $L$ . Если положить  $k = 1$ ,  $e_1 = -1$ ,  $M_1 = M$ , то

$$f \sim -\ln h - \ln M.$$

Можно выбрать  $M_0 \sim 1$  тогда в репличном пределе  $\eta \rightarrow 0$ , из ответа выпадет  $h$ .

Правильный ответ приведён в лекциях в формуле (458).

**Задача 10.5.** Вычислить однопетлевую поправку к плотности состояний  $\nu$ , используя размерную регуляризацию.

**Ответ к задаче 10.5.**

$$\nu = \bar{\nu} \left[ 1 - \frac{n}{\pi \bar{\sigma}_{xx}} \left( \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4\pi}{h^2 e^\gamma} \right) \right) \right], \quad \epsilon = 2 - d, \quad h^2 = 4\pi \bar{\nu} \eta / \bar{\sigma}_{xx}$$

**Решение задачи 10.5.** Согласно формуле (331) лекций

$$\nu = \bar{\nu} \left[ 1 - \frac{2n}{\bar{\sigma}_{xx}} \int D(q)(dq) \right], \quad D(q) = \frac{1}{q^2 + h^2}, \quad h^2 = 4\pi \bar{\nu} \eta / \bar{\sigma}_{xx}.$$

Пусть размерность  $d = 2 - \epsilon$ ,  $\epsilon \rightarrow +0$ .

$$\int D(q)(dq) = \frac{1}{(2\pi)^{2-\epsilon}} \frac{2\pi^{1-\frac{\epsilon}{2}}}{\Gamma(1-\frac{\epsilon}{2})} \int_0^\infty \frac{q^{1-\epsilon} dq}{q^2 + h^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{(2\sqrt{\pi}/h)^\epsilon}{\Gamma(1-\frac{\epsilon}{2})} \frac{\pi/2}{\sin \pi\epsilon/2} = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{4\pi}{h^2 e^\gamma} \right) \right]$$



**Задача 10.7.** Найти диагональные матричные элементы  $\frac{1}{2}(1 - \eta)$  в собственном базисе оператора

$$\mathcal{O}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} \right] + \frac{1}{1 - \eta^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{i}{1 - \eta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{4} \frac{1 + \eta}{1 - \eta} + \frac{1}{2}.$$

**Ответ к задаче 10.7.**

$$\langle \Phi_{jm} | \frac{1}{2}(1 - \hat{\eta}) | \Phi_{jm} \rangle = \frac{1}{2} \left[ \frac{(j+1)(j-m)}{j + \frac{1}{2}} - \frac{j(j-m-1)}{j - \frac{1}{2}} \right].$$

**Решение задачи 10.7.** Согласно (419) собственные функции  $\mathcal{O}_1$  суть

$$\Phi_{jm}(\eta) = C_{jm} e^{im\theta} (1 - \eta)^{m/2+1/2} (1 + \eta)^{m/2} P_{j-m-1}^{m+1,m}(\eta), \quad m = -j, \dots, j-1.$$

$$2\pi C_{jm}^2 = \frac{(j+m)!(j-m-1)!}{2^{2m+1}(j-1)!^2}$$

Мне необходимо вычислить

$$\langle \Phi_{jm} | (1 - \hat{\eta}) | \Phi_{jm} \rangle = 2\pi C_{jm}^2 \int_{-1}^1 (1 - \eta)^{m+2} (1 + \eta)^m [P_n^{m+1,m}(\eta)]^2 d\eta$$

Воспользуюсь следующим представлением полиномов Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta) = \frac{(-)^n}{2^n n!} (1 - \eta)^{-\alpha} (1 + \eta)^{-\beta} \frac{d^n}{d\eta^n} (1 - \eta)^{n+\alpha} (1 + \eta)^{n+\beta}.$$

Здесь далее взаимозаменяемы буквы  $n = j - m - 1$ ,  $\alpha = m + 1$ ,  $\beta = m$ . Сначала интегрирую по частям, затем нахожу  $n$  и  $n - 1$  кратные производные полинома  $P_n^P(\alpha, \beta)$ , в конце вычисляю интегралы сводя к  $B$ -функции.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - \eta)^{m+2} (1 + \eta)^m [P_n^{m+1,m}(\eta)]^2 d\eta &= \frac{(-)^n}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1 - \eta) P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta) \frac{d^n}{d\eta^n} (1 - \eta)^{n+\alpha} (1 + \eta)^{n+\beta} d\eta = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 (1 - \eta)^{n+\alpha} (1 + \eta)^{n+\beta} \left\{ (1 - \eta) [P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)]^{(n)} - n [P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta)]^{(n-1)} \right\} d\eta = (10.1) = \\ &= \frac{1}{2^n n!} [P_n^{(\alpha,\beta)}]^{(n)} \int_{-1}^1 (1 - \eta)^j (1 + \eta)^{j-1} \left\{ (j - m)(1 - \eta) - \frac{jn}{j - \frac{1}{2}} \right\} d\eta = \\ &= \frac{1}{2^n n!} [P_n^{(\alpha,\beta)}]^{(n)} \left\{ (j - m) 2^{2j+1} B(j + 2, j) - \frac{jn}{j - \frac{1}{2}} 2^{2j} B(j + 1, j) \right\} = (10.2) = \\ &= [P_n^{(\alpha,\beta)}]^{(n)} 2^{j+m+1} \frac{j!(j-1)!}{(j-m-1)!(2j)!} \left\{ (j - m) \frac{j+1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{j(j-m-1)}{j - \frac{1}{2}} \right\} = (2\pi C_{jm}^2)^{-1} \{ \dots \}. \end{aligned}$$

Производные полиномов Якоби вычисляются при помощи представления

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\eta) = \frac{(n + \alpha)!}{(n + \alpha + \beta)!} \sum_{k=0}^n \frac{(n + k + \alpha + \beta)!}{k!(n - k)!(\alpha + k)!} \left( \frac{\eta - 1}{2} \right)^k.$$

А именно,

$$\begin{aligned} [P_n^{(\alpha,\beta)}]^{(n)} &= \frac{(2n + \alpha + \beta)!}{(n + \alpha + \beta)!} \frac{1}{2^n} \\ [P_n^{(\alpha,\beta)}]^{(n-1)} &= [P_n^{(\alpha,\beta)}]^{(n)} \left\{ \frac{2(n + \alpha)}{2n + \alpha + \beta} - (1 - \eta) \right\} \end{aligned} \quad (10.1)$$

Возникшие интегралы сводятся к  $B$ -функции согласно

$$\int_{-1}^1 (1 - x)^{a-1} (1 + x)^{b-1} dx = 2^{a+b-1} B(a, b). \quad (10.2)$$

## Список литературы