Записки к курсу В.П. Ру́бана «Нелинейные проблемы гидродинамики»

Сайкин Давид

Последняя компиляция: 1 июля 2019 г.

Содержание

Задачи

Задача 0 (Гауссов вариационный анзац)**.** Выписать и проинтегрировать уравнения движения вариационных параметров $X(t)$, $Y(t)$, $U(t)$, $V(t)$, $I(t)$, $\phi(t)$ в гауссовом анзаце

$$\psi(t,x,y) = \sqrt{\frac{I}{XY}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2X^2} - \frac{y^2}{2Y^2} + i\frac{Ux^2}{2X} + i\frac{Vy^2}{2Y} + i\phi\right\},$$

если ψ подчиняется нелинейному уравнению Шрёдингера

$$2i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0,$$

т. е. описывается Лагранжианом (функционалом Лагранжа)

$$L\left[\psi_t, \psi\right] = \int dxdy\, \mathcal{L}(\psi_t, \psi, \nabla\psi) \equiv \int dxdy\, i(\psi_t\overline{\psi} - \psi\overline{\psi}_t) - |\nabla\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4.$$

Решение задачи 0. Введу вещественные функции $A(t)$, $\alpha(t,x,y)$, $\beta(t,x,y)$, так что $\psi \equiv Ae^{\alpha+i\beta}$. Тогда несложно видеть, что

$$L = \int dxdy \left[-2\beta_t A^2 e^{2\alpha} - ((\nabla\alpha)^2 + (\nabla\beta)^2)A^2e^{2\alpha} + \frac{1}{2}A^4e^{4\alpha}\right],$$

где подинтегральные функции суть

$$\begin{aligned} 2\beta_t &= \dot{U}\frac{x^2}{X} + \dot{V}\frac{y^2}{Y} - U\dot{X}\frac{x^2}{X^2} - V\dot{Y}\frac{y^2}{Y^2} + 2\dot{\phi}, \\ (\nabla\alpha)^2 &= \frac{x^2}{X^4} + \frac{y^2}{Y^4}, \\ (\nabla\beta)^2 &= U^2\frac{x^2}{X^2} + V^2\frac{y^2}{Y^2}. \end{aligned}$$

При интегрировании встречаются гауссовы интегралы двух видов

$$\int dxdy\, A^2e^{2\alpha} \equiv \frac{I}{XY}\int dxdy\, \exp\left\{-\frac{x^2}{X^2} - \frac{y^2}{Y^2}\right\} = \pi I.$$

$$\int dxdy\, x^2A^2e^{2\alpha} \equiv \frac{I}{XY}\int dxdy\, x^2 \exp\left\{-\frac{x^2}{X^2} - \frac{y^2}{Y^2}\right\} = \frac{1}{2}X^2\pi I.$$

Прихожу к эффективному Лагранжиану системы с шестью степенями свободы

$$L_{\text{eff}} = -\frac{1}{2}\pi I\left(\dot{U}X + \dot{V}Y - U\dot{X} - V\dot{Y} + \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + U^2 + V^2 + 4\dot{\phi}\right) + \frac{\pi}{4}\frac{I^2}{XY}.$$

$$L_{\text{eff}} = \frac{I^2}{2XY} - I\left(\dot{U}X + \dot{V}Y - U\dot{X} - V\dot{Y} + \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + U^2 + V^2 + 4\dot{\phi}\right).$$

Поскольку координата ϕ — циклическая, соответвующий обобщённый импульс сохраняется.

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta\phi} = 4\dot{I} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I(t) = \text{const}.$$

Естесвенно преполагать начальные условия таковыми, что $I \neq 0$.
Записывая уравнения Эйлера–Лагранжа для координаты I, нахожу

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta I} = \frac{I}{XY} - \left(\dot{U}X + \dot{V}Y - U\dot{X} - V\dot{Y} + \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + U^2 + V^2 + 4\dot{\phi}\right) = 0 \tag{1}$$

Данное уравнение определит $\phi(t)$, когда будут найдены зависимоти $X(t)$, $Y(t)$, $U(t)$, $V(t)$.

При написании остальных уравнений можно сократить I как константу и игнорировать ϕ.

$$L_{\text{eff}}(X,Y,U,V;I) \simeq \frac{I}{2XY} - \left(\dot{U}X + \dot{V}Y - U\dot{X} - V\dot{Y} + \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + U^2 + V^2\right).$$

Координаты U и V есть обобщённые имульсы X и Y.

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta U} = \dot{X} + \dot{X} - 2U = 0 \qquad \Rightarrow \qquad U = \dot{X},$$
$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta V} = \dot{Y} + \dot{Y} - 2V = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V = \dot{Y}.$$

А уравнения движения X и Y легко разрешаются относительно старшей производной.

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta X} = -\frac{I}{2X^2Y} - 2\dot{U} + \frac{2}{X^3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{X} = \frac{1}{X^3} - \frac{I/4}{YX^2}, \tag{2}$$
$$\frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta Y} = -\frac{I}{2XY^2} - 2\dot{V} + \frac{2}{Y^3} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{Y} = \frac{1}{Y^3} - \frac{I/4}{XY^2}. \tag{3}$$

Легко заметить интеграл энергии последней системы уравнений (2), (3).

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\dot{Y}^2\right\} = \dot{X}\ddot{X} + \dot{Y}\ddot{Y} = \frac{\dot{X}}{X^3} + \frac{\dot{Y}}{Y^3} - \frac{I}{4}\frac{\dot{X}}{YX^2} - \frac{I}{4}\frac{\dot{Y}}{XY^2} = \frac{d}{dt}\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{X^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{Y^2} + \frac{I/4}{XY}\right\}.$$

$$E = \frac{1}{2}\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\dot{Y}^2 + \frac{1}{2X^2} + \frac{1}{2Y^2} - \frac{I/4}{XY} = \text{const}.$$

Глядя на интеграл энергии, нетрудно догадаться какой (Гамильтониан) Лагранжиан описывает систему (X,Y).

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\dot{X}^2 + \frac{1}{2}\dot{Y}^2 - \frac{1}{2X^2} - \frac{1}{2Y^2} + \frac{I/4}{XY}.$$
$$\tilde{H} = \frac{1}{2}P_X^2 + \frac{1}{2}P_Y^2 + \frac{1}{2X^2} + \frac{1}{2Y^2} - \frac{I/4}{XY}.$$

Или переходя к полярным координатам (R,Θ).

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}\dot{R}^2 + \frac{1}{2}R^2\dot{\Theta}^2 - \frac{1}{2X^2} - \frac{1}{2Y^2} + \frac{I/4}{XY}.$$

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}P_R^2 + \frac{P_\Theta^2}{2R^2} + \frac{1}{2R^2\cos^2\Theta} + \frac{1}{2R^2\sin^2\Theta} - \frac{I}{2R^2\sin 2\Theta}.$$

Где канонические импульсы $P_R = \dot{R}$, $P_\Theta = R^2\dot{\Theta}$. Как известно, для Гамильтониана такого вида переменные в уравнении Гамильтона–Якоби разделяются.

$$M = P_\Theta^2 + \frac{4}{\sin^2 2\Theta} - \frac{I}{\sin 2\Theta} = \text{const},$$

$$E = \frac{1}{2}P_R^2 + \frac{M}{2R^2} = \text{const}.$$

$$S = -Et \pm \int dR\sqrt{2E - M/R^2} \pm \int d\Theta\sqrt{M - 4/\sin^2 2\Theta - I/\sin 2\Theta}.$$

$$\frac{\partial S}{\partial E} = -t \pm \int \frac{dR}{\sqrt{2E - M/R^2}} = C_E = \text{const} \quad \Rightarrow \quad R(t) = \sqrt{\frac{M}{2E} + 2E(t + C_E)}.$$

$$2\frac{\partial S}{\partial M} = \mp\int \frac{dR/R^2}{\sqrt{2E - M/R^2}} \pm \int \frac{d\Theta}{\sqrt{M - 4/\sin^2 2\Theta - I/\sin 2\Theta}} = C_M = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \Theta(t).$$

Таким образом, используя теорему Якоби, я нашёл четыре независимых интеграла движения E, M, C_E, C_M, (которые должны быть определены из начальных условий) полностью описывающие движение системы (R, Θ).

Имея на руках зависимоти $R(t)$, $\Theta(t)$ легко вычислить

$$U(t) = \frac{d}{dt}\left\{R(t)\cos\Theta(t)\right\} = \dot{R}(t)\cos\Theta(t) - R(t)\dot{\Theta}(t)\sin\Theta(t),$$
$$V(t) = \frac{d}{dt}\left\{R(t)\sin\Theta(t)\right\} = \dot{R}(t)\sin\Theta(t) + R(t)\dot{\Theta}(t)\cos\Theta(t),$$

и наконец-то проинтегрировать уравнение (1)

$$4\dot{\phi} = \frac{3}{2}\frac{I}{XY} - \frac{2}{X^2} - \frac{2}{Y^2} \qquad \Rightarrow \qquad \phi(t) = \int \frac{dt}{R^2(t)}\left(\frac{3}{4}\frac{I}{\sin 2\Theta(t)} - \frac{2}{\sin^2 2\Theta(t)}\right).$$

Задача 14 (Подводное землетрясение)**.** Дно океана над эпицентром землетрясения испытывает отклонение $b(x, y, t)$ от средней глубины h. Пользуясь относительной малостью $b \ll h$ и условием $|\nabla b| \ll 1$, в линейном приближении решить задачу о возникновении и начальном распространении волны цунами на поверхности океана. Выразить отклонение свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ через спектральные характеристики функции $b(x, y, t)$. Жидкость полагать идеальной и несжимаемой.

Ответ к задаче 14.

$$\eta_{\omega,\mathbf{k}} \simeq \frac{\omega^2\, b_{\omega,\mathbf{k}}}{(\omega^2 - gk \operatorname{th} kh) \operatorname{ch} kh}.$$

Решение задачи 14. Поле скоростей идеальной жидкости потенциально $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, а условие несжимаемости жидкости означает, что плотность $\rho \equiv \mathrm{const}$ и в области заполненной водой выполняется $\Delta\varphi = 0$. В данном случае гамильтониан зависит только от значений потенциала на поверхности $\psi(t, x, y) \rightleftharpoons \varphi(t, x, y, z = \eta(x, y))$ и на дне $\chi(t, x, y) \rightleftharpoons \varphi(t, x, y, z = -h)$ (здесь я пренебрегаю отклоением $b \ll h$). Действительно, кинетическая энергия

$$K = \frac{\rho}{2}\int dV\,(\nabla\varphi)^2 = \frac{\rho}{2}\int\limits_S (d\mathbf{s}\cdot\nabla\varphi)\,\psi + \frac{\rho}{2}\int\limits_B (d\mathbf{s}\cdot\nabla\varphi)\,\chi,$$

а потенциальная энергия силы тяжести

$$\Pi = \rho g\int dxdy \int\limits_{-h+b}^{\eta} dz\, z = \frac{1}{2}\rho g\int\limits_S dxdy\,\eta^2 + f(t).$$

Чтобы найти выражение φ через граничные отклонения η и b необходимо решить внутреннюю задачу Дирихле с подходящими граничными условиями.

$$\begin{cases} \Delta\varphi(t, x, y, z) = 0, \\ \varphi|_{z=0} = \phi(x, y), \\ \partial_z\varphi|_{z=-h} = \partial_t b \end{cases}$$

Здесь хитрым образом вводится функция $\phi = \varphi|_{z=0}$, которая упрощает решение уравнения. При этом считается, что в случае, когда уровень воды опускается ниже $z = 0$, потенциал может быть гладко продолжен вплоть до данной границы. Во втором граничном условии я также пренебрёг b, точное граничное условие имеет вид $\partial_z\varphi|_{z=-h+b} - (\nabla\varphi|_{z=-h+b}\cdot\nabla b) = \partial_t b$.

Решение легко найти с помощью Фурье-преобразования.

$$\varphi(t, \mathbf{r}, z) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left\{\frac{\operatorname{ch} k(z+h)}{\operatorname{ch} kh}\phi_{\mathbf{k}}(t) + \frac{\operatorname{sh} kz}{k\operatorname{ch} kh}\partial_t b_{\mathbf{k}}(t)\right\}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \equiv \left[\frac{\operatorname{ch}\hat{k}(z+h)}{\operatorname{ch}\hat{k}h}\right]\phi + \left[\frac{\operatorname{sh}\hat{k}z}{\hat{k}\operatorname{ch}\hat{k}h}\right]\partial_t b.$$

В первом порядке по $\eta \ll h$ выражаю значения потенциала и его произодных через ψ, η, b.

$$\psi \equiv \varphi|_{z=\eta} \simeq \left[1 + \eta\hat{k}\operatorname{th}\hat{k}h\right]\phi + \eta\left[\frac{1}{\operatorname{ch}\hat{k}h}\right]\partial_t b \equiv \left(1 + \eta\hat{S}\right)\phi + \eta\hat{C}\partial_t b.$$

$$\phi \equiv \varphi|_{z=0} \simeq \left[1 - \eta\hat{k}\operatorname{th}\hat{k}h\right]\psi - \eta\left[\frac{1}{\operatorname{ch}\hat{k}h}\right]\partial_t b \equiv \left(1 - \eta\hat{S}\right)\phi - \eta\hat{C}\partial_t b.$$

$$\begin{aligned} \partial_z\varphi|_{z=\eta} &= \left[\frac{\hat{k}\operatorname{sh}\hat{k}(\eta+h)}{\operatorname{ch}\hat{k}h}\right]\phi + \left[\frac{\operatorname{ch}\hat{k}\eta}{\operatorname{ch}\hat{k}h}\right]\partial_t b \simeq \\ &\simeq \left[\hat{k}\operatorname{th}\hat{k}h + \eta\hat{k}^2\right]\phi + \left[\frac{1}{\operatorname{ch}\hat{k}h}\right]\partial_t b \simeq \\ &\simeq \left[\hat{k}\operatorname{th}\hat{k}h + \eta\hat{k}^2 - \eta\hat{k}\operatorname{th}\hat{k}h\,\hat{k}\operatorname{th}\hat{k}h\right]\psi + \left[\frac{1 - \eta\hat{k}\operatorname{th}\hat{k}h}{\operatorname{ch}\hat{k}h}\right]\partial_t b \equiv \\ &\equiv \left(\hat{S} + \eta\hat{k}^2 - \eta\hat{S}\hat{S}\right)\psi + \left(\hat{C} - \eta\hat{S}\hat{C}\right)\partial_t b. \end{aligned}$$

Где, для краткости, я ввел операторы $\hat{S} \equiv \left[\hat{k} \operatorname{th} \hat{k}h\right]$ и $\hat{C} \equiv \left[1/\operatorname{ch} \hat{k}h\right]$.
Итак, кинетическая энергия есть

$$K = \frac{\rho}{2} \int dxdy \;\; \psi \cdot \partial_z \varphi|_{z=\eta} - \psi(\nabla\eta \cdot \nabla\varphi)|_{z=\eta} + \partial_t b \cdot \chi$$

Если пренебречь $|\nabla\eta| \ll 1$ и учесть выражение

$$\chi \equiv \varphi|_{z=-h} = \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \hat{k}h}\right] \phi - \left[\frac{1}{\hat{k}} \operatorname{th} \hat{k}h\right] \partial_t b \simeq \left(\hat{C} - \eta\hat{S}\hat{C}\right) \psi,$$

то Гамильтониан будет иметь вид

$$H = \frac{\rho}{2} \int dxdy \;\; \psi\hat{S}\psi + \psi\eta\hat{k}^2\psi - \psi\eta\hat{S}\hat{S}\psi + \psi\left(\hat{C} - \eta\hat{S}\hat{C}\right) \partial_t b + \partial_t b \left(\hat{C} - \eta\hat{S}\hat{C}\right) \psi + g\eta^2.$$

Учитывая, что любой оператор выраженный через $i\hat{k}$ — самосопряжённый, прихожу к уравнениям

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \frac{1}{\rho}\frac{\delta H}{\delta\psi} = \hat{S}\psi + \eta\hat{k}^2\psi + \frac{1}{2}\psi\hat{k}^2\eta + \left(\hat{C} - \eta\hat{S}\hat{C}\right)\partial_t b - \eta\hat{S}\hat{S}\psi - \frac{1}{2}\psi\hat{S}\hat{S}\eta, \\ \dot{\psi} = -\frac{1}{\rho}\frac{\delta H}{\delta\eta} = -g\eta - \psi\hat{k}^2\psi. \end{cases}$$

В приближении мелкой воды ($kh \ll 1$) и других приближениях задачи ($\eta \ll h$, $|\nabla\eta| \ll 1$) ведующими членами в уравнении являются

$$\begin{cases} \dot{\eta} = \hat{S}\psi + \hat{C}\partial_t b, \\ \dot{\psi} = -g\eta. \end{cases}$$

Что приводит к простым алгебраическим уравнениям для Фурье–компонент.

$$\begin{cases} (-i\omega)\eta_{\omega,\mathbf{k}} = k \operatorname{th} kh \, \psi_{\omega,\mathbf{k}} + \left(\frac{1}{\operatorname{ch} kh}\right)(-i\omega) b_{\omega,\mathbf{k}}, \\ (-i\omega)\psi_{\omega,\mathbf{k}} = -g\eta_{\omega,\mathbf{k}}. \end{cases}$$

Задача 18 (Надбарьерное отражение)**.** Профиль дна (X, Y) заполненного водой (до уровня $y = 0$) канала задается параметрически комплексной формулой $X(u) + iY(u) = z(w)|_{w=u-i}$, где параметр u пробегает интервал $-\infty < u < +\infty$,

$$z(w) = h_1 w + \frac{1}{\alpha}(h_2 - h_1)\ln(1 + e^{\alpha w}),$$

причём $0 < \alpha < \pi$. Слева направо вдоль канала распространяется слабая гравитационная волна с частотой $\omega \ll \sqrt{g/h_1}$. Волна частично отражается от указанной неоднородности дна. Определить коэффициент отражения R — отношение квадратов амплитуд отраженной и падающей волны.

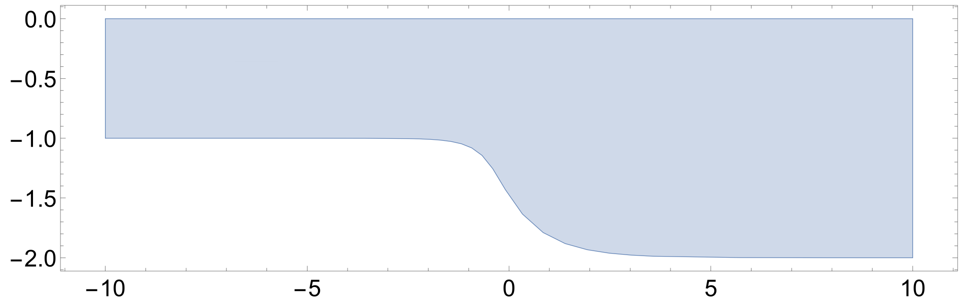

Рис. 1: Образ полосы $-1 < \operatorname{Im} w < 0$ при отображении $z(w)$ со значениями $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $\alpha = 2$.

Ответ к задаче 18.

$$R = \left(\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi\omega}{\alpha\sqrt{g}}\left(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}\right)\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi\omega}{\alpha\sqrt{g}}\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right)\right]}\right)^2.$$

Решение задачи 18. Лагранжиан системы имеет обыкновенный вид

$$L = \rho\int dx\,\psi(t,x)\dot{\eta}(t,x) - H, \qquad H = \frac{\rho}{2}\int dxdy\,(\nabla\varphi(t,x,y))^2 + \frac{\rho g}{2}\int dx\,\eta^2(x).$$

Произведу замену переменных интегрирования $x = X(u,v)$, $y = Y(u,v)$, учитывая, что функции X, Y удобвлетворяют условиям Коши-Римана, а Якобиан замены есть

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = X_u Y_v - X_v Y_u = X_u^2 + X_v^2. \qquad \mathbb{CR}: \begin{cases} X_u = Y_v, \\ X_v = -Y_u. \end{cases}$$

и обозначая $\phi(u,v) \risingdotseq \varphi(X(u,v), Y(u,v))$, $\theta(u) \risingdotseq \eta(X(u,0))$, нахожу, что

$$H = \frac{\rho}{2}\int dudv\,(\nabla\phi(u,v))^2 + \frac{\rho g}{2}\int du\,\theta^2(u) z'(u).$$

При этом поскольку $\Delta\phi(u,v) = \Delta\varphi(X(u,v), Y(u,v))\,(X_u^2(u,v) + X_v^2(u,v))$, то фугкция ϕ также гармоническая в области, где живут (u,v). Значит можно выразить кинетическую энергию через интеграл по поверхности с помощью того же трюка, вводя $\Phi(u) \risingdotseq \phi(u,0)$.

$$\begin{cases} \Delta\varphi(t,u,v) = 0, \\ \varphi|_{v=0} = \Phi(u), \\ \partial_v\varphi|_{v=-1} = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(t,u,v) = \int\frac{dk}{2\pi}\frac{\operatorname{ch}k(v+1)}{\operatorname{ch}k}\Phi_k(t)e^{iku}.$$

Тогда в нулевом порядке по θ имею $\partial_v \phi|_{v=0} \simeq \left[\hat{k}\,\mathrm{th}\,\hat{k}\right] \Phi \simeq \left[\hat{k}\,\mathrm{th}\,\hat{k}\right] \psi$, где $\psi(u) \rightleftharpoons \phi(u, \theta(u))$. Что приводит к Лагранжиану

$$L = \rho \int du\, \psi \dot{\theta} z'(u) - \frac{\rho}{2} \int du\, \psi \left[\hat{k}\,\mathrm{th}\,\hat{k}\right] \psi + g\theta^2 z'(u).$$

Уравнения движения тогда есть

$$\begin{cases} \frac{\delta L}{\delta \psi} = \dot{\theta} z'(u) - \left[\hat{k}\,\mathrm{th}\,\hat{k}\right] \psi = 0, \\ \frac{\delta L}{\delta \theta} = -\dot{\psi} z'(u) - g\theta z'(u) = 0. \end{cases}$$

что после преборазования Фурье по времени и приближения $\left[\hat{k}\,\mathrm{th}\,\hat{k}\right] \simeq \hat{k}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial u^2}$ даёт

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial u^2} - \frac{\omega^2}{g} z'(u)\right) \psi_\omega = 0, \qquad \theta_\omega = \frac{i\omega}{g} \psi_\omega.$$

где $z'(u) = h_1 + (h_2 - h_1)/(1 + e^{-\alpha u})$ — потенциал, для которого известен коэффициент отражения в классической задаче рассеяния (см. Ландау, Ливщиц «Квантовая Механика» §25, Задача №3). В нашем случае фиксация на $u = +\infty$ решения $\psi_\omega \propto \exp\left[i\omega\sqrt{h_2/g} u\right]$ будет отвечать $\psi(t, u) \propto \delta(u - \sqrt{g/h_2} t)$, $\theta(t, u) \propto \delta'(u - \sqrt{g/h_2} t)$, что в определённом смысле можно понимать как базис среди волн бегущих вправо.