Программа спецкурса

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ГИДРОДИНАМИКИ

для студентов 3-го курса кафедры "Проблемы теоретической физики" ФОПФ МФТИ.

Лектор: к.ф.-м.н. В.П. Рубан

Весенний семестр 2016 г.

I. Теоретическая механика идеальной жидкости

1. Принцип наименьшего действия в гидродинамике. Лагранжев и Эйлеров способы описания движения жидкости. Уравнение непрерывности. Функционалы и вариационные производные. Вариационное уравнение Эйлера-Лагранжа для элементов сплошной среды. Маркировочная симметрия жидкой среды и фактическая зависимость лагранжиана только от эйлеровых переменных. Примеры лагранжианов: обычная гидродинамика, релятивистская гидродинамика, двухжидкостная нерелятивистская модель плазмы, электронная магнитная гидродинамика. Общая форма уравнений движения в эйлеровом описании – обобщенное уравнение Эйлера. [7, 8].

2. Гамильтонов формализм в механике жидкости. Определение канонического импульса жидкого элемента. Гамильтонов функционал. Неканоническая скобка Пуассона, ее вырожденность. Интеграл спиральности — пример функционала Казимира. Вмороженность обобщенной завихренности. Теорема Кельвина о сохранении циркуляции и лагранжев инвариант Коши как следствия маркировочной симметрии. Вариационные принципы, определяющие динамику вмороженных вихревых структур заданной топологии. Переменные Клебша как пример канонических переменных. Лагранжиан системы в представлении вмороженных вихревых линий. [7, 8].

3. Потенциальные течения.

а) Звук. Гамильтониан звуковых волн. Квадратичное приближение и нормальные переменные. Нелинейные эффекты, вычисление матричных элементов нелинейного взаимодействия волн. [7].

б) Одномерная газовая динамика. Характеристики. Инварианты Римана. Метод годографа. Опрокидывание простых волн. Ударные волны. Разрывы в начальных условиях. Теория "мелкой воды". Уравнение Бюргерса. [1].

в) Волны на свободной поверхности. Лагранжиан потенциальных несжимаемых течений со свободной поверхностью в общем виде. Пузыри и капли. Канонические переменные η и ψ. Закон дисперсии поверхностных волн. Асимптотическое разложение гамильтониана по степеням малого параметра нелинейности. Конкуренция дисперсии и нелинейности в бегущей волне, уравнение Кортевега-де-Вриза, солитоны. Конформные переменные в плоской задаче со свободной границей. Задача о возбуждении волн ветром. [1, 7, 9, 10, 14, 15, 6].

г) Нелинейное резонансное взаимодействие волн. Редукция гамильтонианов. Задача n волн. Взрывная неустойчивость. Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) для огибающей слабонелинейной квазимонохроматической волны. Волновые коллапсы. Слабонадкритические неустойчивости, образование структур. Волновая турбулентность. Кинетическое уравнение. Каскад энергии и волнового действия. [7, 6, 11, 12].

4. Вихревые структуры в идеальной жидкости. Вихревые листы, неустойчивость тангенциального разрыва. Двумерные течения с кусочно-постоянной завихренностью. Тонкие вихревые нити в пространстве и точечные вихри в плоскости. Гамильтониан и динамика точечных вихрей, применение ТФКП. Нелокальный гамильтониан вихревых нитей. Преобразование Хасимото и интегрируемое приближение локальной индукции в динамике одной вихревой нити. Закон дисперсии для малых возмущений прямой вихревой нити. Неустойчивость Кроу двух антипараллельных вихревых нитей. Проблема образования конечно-временных особенностей из гладких начальных данных в решениях уравнения Эйлера.[6].

II. Вязкая жидкость

1. Ламинарные течения. Уравнения дижения с учетом диссипативных процессов – уравнения Навье-Стокса. Диссипация энергии. Течение по трубе. Движение жидкости между вращающимися цилиндрами. Закон подобия. Течения при малых числах Рейнольдса. Обтекание шара, формула Стокса. Обтекание цилиндра, уравнение Осеена. Ламинарный след. Ламинарный пограничный слой, уравнения Прандтля. Теплопроводность в жидкости. Свободная конвекция. Конвективная неустойчивость неподвижной жидкости. [1].

2. Турбулентность. Проблема устойчивости стационарного течения жидкости. Хаос в динамических системах, представление о странном аттракторе. Развитая турбулентность. Идеи Колмогорова о каскаде. Корреляционные функции скоростей. Аномальная размерность. [1, 4].

III. Другие примеры гидродинамических явлений

1. Сверхтекучая гидродинамика. Спектр элементарных возбуждений в квантовой бозе-жидкости и явление сверхтекучести. Двухскоростная гидродинамика. Квантованные вихревые нити. Вихревая решетка, волны Ткаченко. Сверхтекучая турбулентность. Слабо неидеальный бозе-газ при нуле температур, уравнение Гросса-Питаевского. Неустойчивость конденсата и коллапс волновой функции в случае притяжения. [2, 5, 13].

2. Динамика плазмы.

а)<u>Кинетическое описание плазмы</u>. Бесстолкновительная плазма. Самосогласованное поле. Уравнение Власова. Различные виды волн в плазме. Затухание Ландау. Релаксация начального возмущения. Плазменное эхо. Адиабатический захват электронов. Столкновения частиц в плазме. Неустойчивости в плазме. [3].

б)<u>Гидродинамическое описание плазмы</u>. Многокомпонентные гидродинамические модели плазмы, их различные предельные случаи: квазинейтральная плазма, магнитная гидродинамика (МГД), Холловская МГД, электронная МГД.[3, 7, 8].

Список литературы

[1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Гидродинамика*, (Москва, Наука, 1988).

[2] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Статистическая физика. Часть 2.*

[3] Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Физическая кинетика.*

[4] У. Фриш, *Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова*, (Москва, ФАЗИС, 1998).

[5] И.М. Халатников, *Теория сверхтекучести*, (Москва, Наука, 1971).

[6] В.Е. Захаров, С.В. Манаков, С.П. Новиков, Л.П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, (Москва, Наука, 1980).

[7] В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов, Успехи Физ. Наук **167**, 1137 (1997).

[8] V. P. Ruban, Phys. Rev. E **68**, 047302 (2003); physics/0304101.

[9] A. I. Dyachenko, Y. V. L'vov, and V. E. Zakharov, Physica D **87**, 233 (1995).

[10] А.И. Дьяченко, В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, Физика Плазмы **22**, 916 (1996).

[11] A.M. Balk, Physica D **139**, 137 (2000).

[12] A.N. Pushkarev, V.E. Zakharov, Physica D **135**, 98 (2000).

[13] С.К. Немировский, В.В. Лебедев, ЖЭТФ **84**, 1729 (1983).

[14] V. P. Ruban and J. J. Rasmussen, Phys. Rev. E **68**, 056301 (2003).

[15] V. P. Ruban, Phys. Rev. E **70**, 066302 (2004); Phys. Lett. A **340**, 194 (2005). Phys. Rev. E **78**, 066308 (2008);

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1) В рамках лагранжевого описания решить задачу о гравитационном коллапсе сферически симметричного пылевого облака (в нерелятивистском приближении).

2) Исходя из произвольного лагранжиана $\mathcal{L}\{n, \mathbf{j}, s\}$, получить общий вид вариационного динамического уравнения в эйлеровом описании, не предполагая постоянства удельной энтропии $s(\mathbf{r}, t)$. Перейти к неканоническому гамильтоновскому формализму, вывести скобку Пуассона $\{\mathcal{H}, \mathcal{F}\}$ с учетом градиента s.

3) Лагранжиан ультрарелятивистской изэнтропической жидкости с уравнением состояния $\varepsilon(\tilde{n}) \sim \tilde{n}^{4/3}$ в плоском пространстве-времени имеет вид

$$\mathcal{L}\{n, \mathbf{j}\} = -\int (n^2 - \mathbf{j}^2)^{2/3} d\mathbf{r}.$$

Какой гамильтониан $\mathcal{H}\{n, \mathbf{p}\}$ соответствует этому лагранжиану?

4) Получить представление Клебша, исходя из требования экстремальности действия $\mathcal{A} = \int \mathcal{L}\{n, \mathbf{j}\} dt$ при двух дополнительных условиях: $n_t + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, $\mu_t + (\mathbf{j}/n) \cdot \nabla \mu = 0$.

Указание: Применить метод множителей Лагранжа и варьировать модифицированный функционал действия

$$\mathcal{A}_* = \int dt \left[\mathcal{L}\{n, \mathbf{j}\} + \int \Big\{ \phi(n_t + \nabla \cdot \mathbf{j}) - \lambda(\mu_t + (\mathbf{j}/n) \cdot \nabla \mu) \Big\} d\mathbf{r} \right].$$

5) Найти скорость звука в релятивистской жидкости с уравнением состояния $\varepsilon(\tilde{n})$.

Ответ:

$$c_s^2 = \tilde{n} w'(\tilde{n}) / w(\tilde{n}). \tag{1}$$

6) Найти скорости первого и второго звука в сверхтекучей жидкости, исходя из гамильтониана

$$\mathcal{H}_{s.f} = \int \left[\rho \frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + S(\mathbf{v}_s \cdot \mathbf{P}) + E_0(\rho, S, P^2) \right] d\mathbf{r}$$

и полагая течения потенциальными, то есть $\mathbf{v}_s = \nabla \alpha$, $\mathbf{P} = \nabla \beta$. Функцию $E_0(\rho, S, P^2)$ считать заданной.

7) Получить явные выражения для матричных элементов $U_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}$ и $V_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3}$ нелинейного взаимодействия звуковых волн в обычной сжимаемой гидродинамике.

8) В уравнениях одномерной релятивистской гидродинмики

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w(\tilde{n}) j}{\sqrt{n^2 - j^2}} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w(\tilde{n}) n}{\sqrt{n^2 - j^2}} \right),$$

где $\tilde{n} = \sqrt{n^2 - j^2}$, а $w(\tilde{n})$– известная функция, произвести переход к новым независимым переменным w и $\beta = \mathrm{Arth}\,(j/n)$. Свести задачу к одному линейному уравнению.

Указание: предварительно переписать систему уравнений в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\tilde{n}(w)\mathrm{ch}\,\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(\tilde{n}(w)\mathrm{sh}\,\beta) = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(w\,\mathrm{sh}\,\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(w\,\mathrm{ch}\,\beta) = 0. \tag{3}$$

Решение: Уравнение (3) перепишем в следующем виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - w\ \mathrm{sh}\beta = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + w\ \mathrm{ch}\beta = 0. \tag{4}$$

Для дифференциала φ, используя (4), получаем формулу

$$d\varphi = w\ \mathrm{sh}\beta\ dx - w\ \mathrm{ch}\beta\ dt =$$

$$= d(xw\ \mathrm{sh}\beta - tw\ \mathrm{ch}\beta) + dw(t\ \mathrm{ch}\beta - x\ \mathrm{sh}\beta) + d\beta(tw\ \mathrm{sh}\beta - xw\ \mathrm{ch}\beta).$$

Считая независимыми переменными пару (w, β), введем вспомогательную функцию $\chi(w, \beta)$, с помощью которой осуществляется преобразование Лежандра:

$$\chi = \varphi - x(w, \beta)w\ \mathrm{sh}\beta + t(w, \beta)w\ \mathrm{ch}\beta.$$

При этом частные производные новой функции линейно связаны с x и t:

$$\frac{\partial \chi}{\partial w} = t\ \mathrm{ch}\beta - x\ \mathrm{sh}\beta, \qquad \frac{\partial \chi}{\partial \beta} = tw\ \mathrm{sh}\beta - xw\ \mathrm{ch}\beta.$$

Зная зависимость $\chi(w, \beta)$, можно найти $x(w, \beta)$ и $t(w, \beta)$ по формулам

$$t = \frac{\partial \chi}{\partial w}\ \mathrm{ch}\beta - \frac{1}{w}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\ \mathrm{sh}\beta, \qquad x = \frac{\partial \chi}{\partial w}\ \mathrm{sh}\beta - \frac{1}{w}\frac{\partial \chi}{\partial \beta}\ \mathrm{ch}\beta, \tag{5}$$

которые определяют решение задачи в неявном виде. Чтобы написать уравнение для $\chi(w, \beta)$, следует использовать уравнение непрерывности. Записав частные производные в виде якобианов, получим из (2) после умножения на $\partial(t, x)/\partial(w, \beta)$

$$\mathrm{ch}\beta\ \tilde{n}'(w)\frac{\partial(w, x)}{\partial(w, \beta)} + \mathrm{sh}\beta\ \tilde{n}(w)\frac{\partial(\beta, x)}{\partial(w, \beta)} + \mathrm{sh}\beta\ \tilde{n}'(w)\frac{\partial(t, w)}{\partial(w, \beta)} + \mathrm{ch}\beta\ \tilde{n}(w)\frac{\partial(t, \beta)}{\partial(w, \beta)} = 0.$$

После раскрытия якобианов, подстановки (5) и упрощения получаем отсюда уравнение на функцию $\chi(w, \beta)$:

$$\tilde{n}(w)\chi_{ww} + \tilde{n}'(w)\left(\chi_w - \frac{\chi_{\beta\beta}}{w}\right) = 0.$$

Использование формулы (1) для скорости звука позволяет окончательно представить данное уравнение в несколько иной форме:

$$c_s^2(w)w^2\chi_{ww} + w\chi_w - \chi_{\beta\beta} = 0. \tag{6}$$

Интересно отметить, что в ультрарелятивистском пределе уравнение состояния $w \sim \tilde{n}^{1/3}$ дает для скорости звука константу: $c_s^2 = 1/3$. В этом случае после замены $w = e^q$ приходим к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\chi_{qq} + 2\chi_q - 3\chi_{\beta\beta} = 0.$$

9) Как известно, позади идущего с постоянной скоростью корабля на поверхности воды образуется характерная стационарная симметричная картина из двух рядов волновых гребней, причем эти ряды пересекаются под вполне определенным углом 2α. Чему равен угол α в случае "глубокой воды" ?

Ответ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

10) Найти собственные частоты малых колебаний сферической капли радиуса R, несущей на себе электрический заряд e. Жидкость полагать несжимаемой с плотностью ρ, идеальным проводником. Учесть поверхностное натяжение σ.

Решение: Лагранжиан потенциальных колебаний капли имеет вид

$$\mathcal{L} = \int r^2 \dot{r} \psi \sin\vartheta d\vartheta d\varphi - (\mathcal{K} + \mathcal{A} + \mathcal{E})/\rho,$$

где $\mathcal{K}$ — кинетическая энергия капли, $\mathcal{A}$ — поверхностная энергия, $\mathcal{E}$ – энергия электрического поля. С нужной точностью потенциал скорости дается выражением

$$\phi(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l,m} \Psi_{l,m} \left(\frac{r}{R}\right)^l Y_{l,m}(\vartheta,\varphi),$$

где $\Psi_{l,m}$ – коэффициенты разложения функции $\psi(\vartheta,\varphi)$ по сферическим гармоникам. Поэтому

$$\mathcal{K}/\rho \approx \frac{R^2}{2} \int \psi \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\Big|_{r=R} \right) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{R}{2} \sum_{l,m} l |\Psi_{l,m}|^2. \tag{7}$$

Канонической переменной, сопряженной к $\psi(\vartheta,\varphi)$, является $Q(\vartheta,\varphi) = r^3/3 = R^3/3 + q(\vartheta,\varphi)$, где малая функция q не содержит нулевой гармоники в силу несжимаемости:

$$q(\vartheta,\varphi) = \sum_{l>0;m} q_{l,m} Y_{l,m}(\vartheta,\varphi).$$

Для поверхностной энергии

$$\mathcal{A} = \sigma \int \sqrt{r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2}\, r \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

в квадратичном приближении получаем

$$\mathcal{A} - \mathcal{A}_0 \approx \frac{\sigma}{2R^4} \int \left[q_\vartheta^2 + \frac{q_\varphi^2}{\sin^2\vartheta} - 2q^2 \right] \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{\sigma}{2R^4} \sum_{l,m} (l(l+1) - 2)|q_{l,m}|^2.$$

При вычислении электрической энергии удобно использовать тот факт, что электрическая сила, действующая на единицу поверхности проводника, равна $E^2/8\pi$, и что потенциал электрического поля постоянен вдоль поверхности:

$$\alpha(R+\xi) + \frac{e}{R+\xi} = \text{const}, \quad \xi = r - R, \quad \alpha(r,\vartheta,\varphi) = \sum_{l,m} \alpha_{l,m} \left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_{l,m}(\vartheta,\varphi).$$

В первом по ξ приближении α определяется из уравнения $\alpha(R,\vartheta,\varphi) - e\xi(\vartheta,\varphi)/R^2 = 0$, что дает

$$\alpha = \frac{e}{R^2}\sum_{l,m}\xi_{l,m}\left(\frac{R}{r}\right)^{l+1} Y_{l,m}(\vartheta,\varphi),$$

$$-\frac{\partial\alpha}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{e}{R^3}\sum_{l,m}\xi_{l,m}(l+1)Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$$

Нормальная сила $(-\nabla(e/r)-\nabla\alpha)^2/8\pi$, которая действует на единицу поверхности капли, приближенно равна

$$F \approx \frac{e^2}{8\pi}\left(\frac{\mathbf{e}_r}{(R+\xi)^2} + \frac{\mathbf{e}_r(\hat{l}+1)\xi}{R^3}\right)^2 \approx \frac{e^2}{4\pi R^4}\left(\frac{1}{2} + \frac{(\hat{l}-1)\xi}{R}\right).$$

Как известно, $F = -\delta\mathcal{E}/\delta q$. Отсюда следует, что квадратичная по малой деформации часть электрической энергии есть

$$\mathcal{E}^{(2)} = -\frac{e^2}{8\pi R^7}\int q[(\hat{l}-1)q]\sin\vartheta d\vartheta d\varphi = -\frac{e^2}{8\pi R^7}\sum_{l,m}(l-1)|q_{l,m}|^2.$$

Таким образом, квадратичная часть гамильтониана имеет вид

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{l,m}\left(Rl|\Psi_{l,m}|^2 + \frac{(l-1)}{\rho}\left[\frac{\sigma}{R^4}(l+2) - \frac{e^2}{4\pi R^7}\right]|q_{l,m}|^2\right)$$

Из соответствующих линейных уравнений движения

$$\dot{q}_{l,m} = \frac{\partial\mathcal{H}^{(2)}}{\partial\Psi_{l,-m}}, \qquad -\dot{\Psi}_{l,m} = \frac{\partial\mathcal{H}^{(2)}}{\partial q_{l,-m}}$$

получаем ответ:

$$\omega_l^2 = \frac{l(l-1)}{\rho}\left[\frac{\sigma}{R^3}(l+2) - \frac{e^2}{4\pi R^6}\right], \qquad l = 2,3,\ldots$$

11) Найти собственные частоты малых колебаний однородной несжимаемой жидкой капли радиуса R и массы M, между элементами которой действует ньютоновское притяжение.

Решение: Потенциальная энергия деформированной капли есть

$$\Pi\{\Sigma\} = \frac{1}{2}\int\int U(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2,$$

где $U(r) = -G/r$, а плотность $\rho(\mathbf{r})$ равна $\tilde{\rho}$ $(= const)$ или 0 в зависимости от того, находится точка $\mathbf{r}$ внутри или снаружи свободной поверхности Σ. Рассмотрим малые отклонения от равновесной сферической формы. Увеличение потенциальной энергии при деформации дается формулой

$$\delta\Pi = \int\varphi_0(r)\delta\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} + \frac{1}{2}\int\int U(|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)\delta\rho(\mathbf{r}_1)\delta\rho(\mathbf{r}_2)d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2,$$

где $\varphi_0(r)$ — потенциал, создаваемый равновесным распределением жидкости. Поскольку $\int \delta\rho(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \delta M = 0$ и, кроме того, вблизи сферической поверхности можно написать $\varphi_0(r) = \varphi_0(R) + g(r-R) + \mathcal{O}((r-R)^2)$, то с точностью до квадратичных членов по малым отклонениям $\xi(\mathbf{n}) = r(\mathbf{n}) - R$ получим

$$\Pi^{(2)} = \frac{gR^2\tilde{\rho}}{2}\int \xi^2(\mathbf{n})d\Omega + \frac{R^4\tilde{\rho}^2}{2}\int\int U\Big(R\sqrt{2[1-(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)]}\Big)\xi(\mathbf{n}_1)\xi(\mathbf{n}_2)d\Omega_1 d\Omega_2,$$

где $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ — элемент телесного угла в направлении единичного вектора $\mathbf{n} = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$. Далее заметим, что каноническими переменными в рассматриваемой задаче являются $\psi(\mathbf{n})$ (граничное значение потенциала скорости) и $Q(\mathbf{n}) = \tilde{\rho}r^3(\mathbf{n})/3$, причем гамильтониан равен сумме кинетической и потенциальной энергий. Квадратичная часть кинетической энергии есть [см. (7)]

$$\mathcal{K}^{(2)} = \frac{\tilde{\rho}R}{2}\sum_{l,m} l|\Psi_{l,m}|^2.$$

Квадратичную часть потенциальной энергии перепишем в терминах $q(\mathbf{n}) = Q(\mathbf{n}) - \tilde{\rho}R^3/3$:

$$\Pi^{(2)} = \frac{g}{2\tilde{\rho}R^2}\int q^2(\mathbf{n})d\Omega + \frac{1}{2}\int\int U\Big(R\sqrt{2[1-(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)]}\Big)q(\mathbf{n}_1)q(\mathbf{n}_2)d\Omega_1 d\Omega_2,$$

после чего произведем разложение $q(\mathbf{n})$ по сферическим гармоникам:

$$q(\mathbf{n}) = \sum_{lm} q_{lm}Y_{lm}(\mathbf{n}), \qquad q_{lm} = \int q(\mathbf{n})Y^*_{lm}(\mathbf{n})d\Omega.$$

Заметим, что функция $F(\mu) \equiv U\Big(R\sqrt{2[1-\mu]}\Big)$ раскладывается по полиномам Лежандра $P_l(\mu)$:

$$F(\mu) = \sum_l f_l P_l(\mu), \qquad P_l(\mu) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d\mu^l}(\mu^2-1)^l,$$

причем

$$f_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1} F(\mu)P_l(\mu)d\mu.$$

Весьма важно, что имеет место формула разложения для $P_l(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_1)$ (см. Приложения в книге Ландау и Лифшица “Квантовая механика”):

$$P_l(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_1) = \frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l} Y^*_{lm}(\mathbf{n}_1)Y_{lm}(\mathbf{n}), \tag{8}$$

использование которой дает

$$\frac{1}{2}\int\int F(\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2)q(\mathbf{n}_1)q(\mathbf{n}_2)d\Omega_1 d\Omega_2 = \frac{1}{2}\sum_{lm} F_l|q_{lm}|^2,$$

где

$$F_l = 2\pi\int_{-1}^{+1} F(\mu)P_l(\mu)d\mu = \frac{2\pi}{2^l l!}\int_{-1}^{+1} U\Big(R\sqrt{2[1-\mu]}\Big)\frac{d^l}{d\mu^l}(\mu^2-1)^l d\mu. \tag{9}$$

Вычисление величины g не требует дополнительных усилий, поскольку заранее очевидно, что потенциальная энергия сферической капли остается неизменной при однородном сдвиге в пространстве. Малый сдвиг соответствует сферическим гармоникам с $l = 1$. Отсюда получаем, что

$$\Pi^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{lm}(F_l - F_1)|q_{lm}|^2$$

и, соответственно, частоты малых колебаний капли определяются общей формулой

$$\omega_l^2 = \tilde{\rho}R \cdot l(F_l - F_1), \tag{10}$$

верной при произвольном потенциале взаимодействия $U(r)$. В нашем случае

$$F_l = -\frac{2\pi G}{\sqrt{2}R2^l l!}\int_{-1}^{+1}(1-\mu)^{-1/2}\frac{d^l}{d\mu^l}(\mu^2-1)^l d\mu.$$

l-кратное интегрирование по частям и замена $1 - \mu = 2\zeta^2$ позволяют элементарно вычислить интеграл и получить

$$F_l = -\frac{4\pi G}{R(2l+1)}.$$

Таким образом, в случае ньютоновского притяжения несжимаемая капля колеблется с частотами

$$\omega_l^2 = 4\pi G\tilde{\rho} \cdot l\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2l+1}\right) = \frac{2GM}{R^3}\cdot\frac{l(l-1)}{(2l+1)}, \qquad l = 2, 3, \ldots$$

Отметим попутно, что F_l легко вычисляются также в случаях 1) $U(r) = -\kappa/r^\alpha$ и 2) $U(r) = -U_0\exp(-ar^2/2)$.

12) Вода заполняет ровно половину сферической полости диаметра $D = 1$m. Найти собственные частоты малых колебаний свободной поверхности в поле тяжести g.

13) В идеальной несжимаемой жидкости с плотностью ρ, находящейся под внешним давлением P_{ext}, в начальный момент времени создан сферический пустой пузырек объема $\mathcal{V}_0$. Под действием поверхностного натяжения σ и внешнего давления пузырек начал схлопываться. Через какое время пузырек полностью сколлапсирует?

Ответ: В общем случае динамика пузыря с газом внутри определяется неявно соотношением

$$t - t_0 = \pm\int_{\mathcal{V}_0}^{\mathcal{V}}\frac{d\tilde{\mathcal{V}}}{\sqrt{2a\tilde{\mathcal{V}}^{1/3}[E_0 - \mathcal{E}(\tilde{\mathcal{V}}) - P_{ext}\tilde{\mathcal{V}} - b\tilde{\mathcal{V}}^{2/3}]}},$$

где $a = 3^{1/3}(4\pi)^{2/3}$, $b = 3^{2/3}(4\pi)^{1/3}\sigma/\rho$, E_0 – произвольная константа, а $\mathcal{E}(\mathcal{V})$ – внутренняя энергия сжатого в пузыре газа (деленная на плотность жидкости). В нашем случае газа в пузыре нет, то есть $\mathcal{E}(\mathcal{V}) = 0$. Поскольку в начальный момент времени $d\mathcal{V}/dt = 0$, то $E_0 = P_{ext}\tilde{\mathcal{V}}_0 + b\tilde{\mathcal{V}}_0^{2/3}$, и поэтому время коллапса

$$T_{collapse} = \int_0^{\mathcal{V}_0}\frac{d\tilde{\mathcal{V}}}{\sqrt{2a\tilde{\mathcal{V}}^{1/3}[P_{ext}\tilde{\mathcal{V}}_0 + b\tilde{\mathcal{V}}_0^{2/3} - P_{ext}\tilde{\mathcal{V}} - b\tilde{\mathcal{V}}^{2/3}]}}.$$

14) Дно океана над эпицентром землетрясения испытывает отклонение $b(x, y, t)$ от средней глубины h. Пользуясь относительной малостью $b \ll h$ и условием $|\nabla b| \ll 1$, в линейном приближении решить задачу о возникновении и начальном распространении волны цунами на поверхности океана. Выразить отклонение свободной поверхности $\eta(x, y, t)$ через спектральные характеристики функции $b(x, y, t)$. Жидкость полагать идеальной и несжимаемой.

Ответ:

$$\eta(\mathbf{r}_\perp, t) = \int \frac{\omega^2 b(\mathbf{k}, \omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\perp - \omega t)}}{(\omega^2 - gk\,\mathrm{th}kh)\,\mathrm{ch}kh} \frac{d^2\mathbf{k} d\omega}{(2\pi)^3}$$

15) Прямоугольный контейнер (размеры дна a=1 m и b=0.5 m) заполнен водой до некоторого уровня h. Внешняя сила приводит его в возвратно-поступательное вертикальное движение с амплитудой A=0.05 m и частотой ω_0 =5 rad/s ($A\omega_0^2 \ll g$). При каких значениях h в системе имеет место параметрический резонанс? Воду считать идеальной жидкостью.

16) На дне водоема глубины h имеется подводный гребень с характерной шириной $\alpha^{-1} \gg h$, тянущийся вдоль оси x, так что равновесная глубина $H(y)$ является функцией с достаточно широким и плавным минимумом (например, $H(y) = H_*(y) \equiv h[1+\beta/\mathrm{ch}^2\alpha y]^{-1}$). Такая система обладает свойствами волновода, поскольку вдоль гребня могут распространяться волны с амплитудами, которые экспоненциально спадают при $|y| \to \infty$. Действуя в рамках линеаризованной “теории мелкой воды”, то есть взяв уравнения движения $\dot{\psi} = -g\eta$, $\dot{\eta} + \nabla \cdot (H(y)\nabla\psi) = 0$ и рассматривая их решения вида $\eta(x, y, t) = A_n(k, y) \exp(-i\omega_n(k)t + ikx)$ [где $kh \ll 1$], требуется вывести “квазиклассическое” правило квантования поперечного движения волн, дающее законы дисперсии $\omega_n(k)$ для поперечных мод с достаточно большими номерами n, при условии, что $1 \ll n \ll 1/(\alpha h)$.

Ответ:

$$\oint q dy = 2\pi \left(n + \frac{1}{2}\right), \qquad q^2 = \frac{\omega_n^2}{gH(y)} - k^2 + \frac{H'^2(y)}{4H^2(y)} - \frac{H''(y)}{2H(y)}.$$

17) Исследовать в линейном приближении задачу о прохождении поверхностной волны с частотой ω через пролив — область $x^2 - y^2\mathrm{tg}^2\alpha < a^2$ между двумя отвесными берегами. Равновесная глубина воды равна h.

Указание: Перейти к новым координатам $x = A\sin u\ \mathrm{ch}v$, $y = A\cos u\ \mathrm{sh}v$ с параметром $A = a/\sin\alpha$ и решать в области $-\alpha \leq u \leq +\alpha$, $-\infty < v < +\infty$ уравнение $\psi_{uu} + \psi_{vv} + (kA)^2(\cos^2 u + \mathrm{sh}^2 v)\psi = 0$, где параметр k определяется из соотношения $\omega^2 = gk\mathrm{th}\,kh$.

18) Профиль дна заполненного водой (до уровня $y = 0$) канала задается параметрически комплексной формулой $X_b(u) + iY_b(u) = z(w)|_{w=u-i}$, где параметр u пробегает интервал $-\infty < u < +\infty$,

$$z(w) = h_1 w + \frac{(h_2 - h_1)}{\alpha} \ln(1 + e^{\alpha w}),$$

причем $h_1 > h_2 > 0$, $0 < \alpha < \pi$. Слева направо вдоль канала распространяется слабая гравитационная волна с частотой $\omega \ll \sqrt{g/h_1}$. Волна частично отражается от указанной неоднородности дна. Определить коэффициент отражения R (отношение квадратов амплитуд отраженной и падающей волны).

Подсказка: обратить внимание на тот факт, что

$$z'(w) \equiv \frac{dz}{dw} = h_1 + (h_2 - h_1)\frac{1}{1+e^{-\alpha w}}, \tag{11}$$

и воспользоваться результатом задачи #3 к §25 "Коэффициент прохождения" из книги Ландау и Лифшица "Квантовая механика".

Решение: Аналитическая функция $z(w)$ отображает полосу $-1 < \mathrm{Im\ w} < 0$ на область, занятую покоящейся жидкостью. Поэтому квадратичная часть лагранжиана потенциальных волн имеет вид

$$\mathcal{L}^{(2)} = \int \psi y_t x'(u) du - \frac{1}{2}\int [\psi\, \hat{k}\mathrm{th}\hat{k}\, \psi\, + g y^2 x'(u)] du,$$

где $\psi = \psi(u,t)$, $y = y(u,t)$, $x'(u) = z'(w)|_{w=u}$. Соответствующие линейные уравнения движения

$$y_t = \frac{\hat{k}\mathrm{th}\hat{k}\, \psi}{x'(u)}, \qquad -\psi_t = g y$$

дают в случае монохроматической волны уравнение

$$\left(\frac{\omega^2}{g}x'(u) - \hat{k}\mathrm{th}\hat{k}\right)\psi_\omega(u) = 0.$$

Пределу малых частот соответствуют длинные волны, когда $\hat{k}\mathrm{th}\hat{k} \approx \hat{k}^2 = -(d/du)^2$, так что в этом пределе мы должны решать уравнение

$$\frac{\omega^2}{g}x'(u)\psi_\omega(u) + \psi''_\omega(u) = 0.$$

Подстановка конкретного выражения (11) дает уравнение

$$\psi''_\omega(u) + \frac{\omega^2}{g}\left(h_1 + (h_2 - h_1)\frac{1}{1+e^{-\alpha u}}\right)\psi_\omega(u) = 0,$$

для которого коэффициент отражения известен:

$$R(\omega) = \left(\frac{\mathrm{sh}[\frac{\pi\omega}{\alpha\sqrt{g}}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2})]}{\mathrm{sh}[\frac{\pi\omega}{\alpha\sqrt{g}}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2})]}\right)^2.$$

19) Решить задачу #18 с другим профилем дна: $z(w) = h(w + (\beta/\alpha)\mathrm{th}\,\alpha w)$. Найти также значения ω, при которых функция $R(\omega)$ имеет минимум.

Ответ: Решая приближенное уравнение

$$\psi''(u) + q^2\left(1 + \frac{\beta}{\mathrm{ch}^2\alpha u}\right)\psi(u) = 0,$$

где $q = \omega\sqrt{h/g}$, получим коэффициент отражения

$$R = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{4q^2\beta}{\alpha^2}}\right)}{\mathrm{sh}^2\frac{\pi q}{\alpha} + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{1+\frac{4q^2\beta}{\alpha^2}}\right)}.$$

20) * Канал с водой имеет периодический профиль дна (см. условие задачи #18): $dz/dw = h(1 + 2\epsilon\cos\alpha w)$, где параметр ϵ удовлетворяет условиям $\epsilon \le 1/(2\,\mathrm{ch}\,\alpha)$, $\epsilon \ll 1$. Волны с какими частотами не могут распространяться вдоль канала без изменения амплитуды при сдвиге $u \to u + 2\pi/\alpha$? (Иными словами, требуется определить шели в спектре волн).

Решение: Уравнение, определяющее собственные функции $\psi_\lambda(u)$ (где $\lambda = \omega^2 h/g$), в данном случае имеет вид

$$\lambda(1 + 2\epsilon\cos\alpha u)\psi(u) - \hat{k}\mathrm{th}\hat{k}\psi(u) = 0.$$

Перепишем это уравнение в Фурье-представлении по переменной u:

$$(\lambda - k\mathrm{th}k)\psi(k) + \lambda\epsilon[\psi(k-\alpha) + \psi(k+\alpha)] = 0.$$

Для удобства дальнейших вычислений введем обозначения

$$F_\nu = \alpha\nu\,\mathrm{th}(\alpha\nu), \qquad \Psi_\nu = \psi(\alpha\nu).$$

Теперь мы имеем бесконечную цепочку линейных уравнений

$$(\lambda - F_\nu)\Psi_\nu + \lambda\epsilon[\Psi_{\nu-1} + \Psi_{\nu+1}] = 0, \tag{12}$$

в которой оказываются "зацепленными" Ψ_{ν_1} и Ψ_{ν_2} с ν_1 и ν_2, отличающимися на целое число. Условие обращения в нуль соответствующего бесконечного определителя даст упорядоченный набор собственных значений $\lambda_m(\nu)$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$. Необходимо отметить, что эти функции периодические: $\lambda_m(\nu+1) = \lambda_m(\nu)$, поскольку бесконечная матрица системы (12) по существу переходит сама в себя при замене $\nu \to \nu + 1$. Кроме того, благодаря четности рассматриваемой системы $\lambda_m(-\nu) = \lambda_m(\nu)$. Далее следует отметить, что (четная) функция F_ν монотонно возрастает при $\nu > 0$. Все эти свойства при достаточно малых ϵ приводят к тому, что для четных номеров $m = 2n$ справедлива формула $\lambda_{2n}(\nu) \approx F_{n+\{|\nu|\}}$ (где фигурные скобки $\{\ldots\}$ означают взятие дробной части), тогда как в случае нечетных номеров $m = 2n+1$ имеет место приближенное равенство $\lambda_{2n+1}(\nu) \approx F_{n+1-\{|\nu|\}}$. При этом щели в спектре $\delta_m = \min_\nu[\lambda_m(\nu)] - \max_\nu[\lambda_{m-1}(\nu)]$ совпадают с минимумами $\min_\nu[\lambda_m(\nu) - \lambda_{m-1}(\nu)]$, которые достигаются либо при целых, либо при полуцелых значениях ν, где влияние периодического возмущения наиболее существенно (Брэгговские резонансы). Первая, третья, пятая, и т. д. щели соответствуют полуцелым значениям ν, а вторая, четвертая, и т. д. – целым ν. Существенно, что как при целых, так и при полуцелых ν решения системы (12) обладают определенной четностью в том смысле, что $\Psi_{-\nu} = \pm\Psi_\nu$. Это позволяет при нахождении границ щелей рассматривать только Ψ_ν с неотрицательными ν. Рассмотрим сначала полуцелые ν. В этом случае мы должны решать полубесконечную цепочку

$$(\lambda - F_{1/2})\Psi_{1/2} + \lambda\epsilon(\pm\Psi_{1/2} + \Psi_{3/2}) = 0,$$

$$(\lambda - F_{3/2})\Psi_{3/2} + \lambda\epsilon(\Psi_{1/2} + \Psi_{5/2}) = 0,$$
$$(\lambda - F_{5/2})\Psi_{5/2} + \lambda\epsilon(\Psi_{3/2} + \Psi_{7/2}) = 0,$$
$$\dots$$

Очевидно, что λ, при которых имеются нетривиальные решения, различны в четном и нечетном случаях, чем и определяются щели в спектре. Для приближенного нахождения первой и третьей щелей оборвем эту систему, положив в ней $\Psi_{7/2} = 0$, $\Psi_{9/2} = 0$, ... Теперь нам нужно обратить в нуль детерминант 3×3

$$[\{\lambda(1 \pm \epsilon) - F_{1/2}\}(\lambda - F_{3/2}) - \lambda^2\epsilon^2](\lambda - F_{5/2}) - \lambda^2\epsilon^2[\lambda(1 \pm \epsilon) - F_{1/2}] = 0.$$

Положим сначала $\lambda = F_{1/2} + \Delta_1$, где Δ_1 — малая величина (порядка ϵ, как нетрудно видеть). Выпишем в главном (первом) порядке уравнение на Δ_1:

$$\Delta_1 \pm \epsilon F_{1/2} = 0,$$

что дает нам первую щель: $F_{1/2}(1 - \epsilon) < \lambda < F_{1/2}(1 + \epsilon)$.

Далее положим $\lambda = F_{3/2} + \Delta_3$, где Δ_3 – порядка ϵ^2. Уравнение на Δ_3 с точностью до третьего порядка есть

$$[(F_{3/2}(1 \pm \epsilon) - F_{1/2})\Delta_3 - \epsilon^2 F_{3/2}^2](F_{3/2} - F_{5/2}) - \epsilon^2 F_{3/2}^2(F_{3/2}(1 \pm \epsilon) - F_{1/2}) = 0.$$

Отсюда находим

$$\Delta_3 = \epsilon^2 F_{3/2}^2 \left[\frac{1}{(F_{3/2} - F_{5/2})} + \frac{1}{(F_{3/2}(1 \pm \epsilon) - F_{1/2})}\right],$$

причем мы вправе удержать в этом решении только члены второго и третьего порядков. Это дает нам границы третьей щели $\lambda_-^{(3)} < \lambda < \lambda_+^{(3)}$:

$$\lambda_\pm^{(3)} = F_{3/2} + \epsilon^2 F_{3/2}^2 \left[\frac{1}{(F_{3/2} - F_{5/2})} + \frac{1}{(F_{3/2} - F_{1/2})}\right] \pm \frac{\epsilon^3 F_{3/2}^3}{(F_{3/2} - F_{1/2})^2}.$$

Аналогично рассматриваются щели с четными номерами, определяемые системой

$$(\lambda - F_0)\Psi_0 + \lambda\epsilon(\pm\Psi_1 + \Psi_1) = 0,$$
$$(\lambda - F_1)\Psi_1 + \lambda\epsilon(\Psi_0 + \Psi_2) = 0,$$
$$(\lambda - F_2)\Psi_2 + \lambda\epsilon(\Psi_1 + \Psi_3) = 0,$$
$$\dots$$

Например, границы второй щели во втором порядке по ϵ даются формулами

$$\lambda_-^{(2)} = F_1 - \frac{\epsilon^2 F_1^2}{F_2 - F_1}, \qquad \lambda_+^{(2)} = F_1(1 + 2\epsilon^2) - \frac{\epsilon^2 F_1^2}{F_2 - F_1}.$$

21) Гамильтониан модели Буссинеска, описывающей слабонелинейные волны с дисперсией на мелкой воде, имеет вид

$$\mathcal{H}_B = \frac{1}{2}\int \left[g\eta^2 + h(\nabla\psi)^2 - \frac{h^3}{3}(\Delta\psi)^2 + \eta(\nabla\psi)^2\right] d\mathbf{r}_\perp,$$

где η и ψ – канонические переменные, h – постоянный параметр (равновесная глубина слоя жидкости). Из соответствующих этому гамильтониану уравнений движения вывести уравнение Кортевега-де-Вриза для плоской бегущей волны.

Ответ: Обозначив $c = \sqrt{gh}$, $u = \psi_x$, получим в результате

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right) u = -\frac{3}{2}uu_x - \frac{ch^2}{6}u_{xxx}.$$

Уединенная волна (солитон) имеет вид

$$u = \frac{\epsilon c}{\mathrm{ch}^2[(2h)^{-1}\sqrt{6\epsilon}\{x - c(1+\epsilon)t\}]}.$$

22) * Двумерное (в плоскости xy) течение идеальной несжимаемой жидкости со свободной поверхностью имеет постоянную завихренность $\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = -\Omega\mathbf{e}_z$, так что в стационарном состоянии жидкость заполняет полосу $-h < y < 0$, а невозмущенное поле скорости есть $\mathbf{V}_0 = \Omega y\mathbf{e}_x$. Показать, что задача о нестационарном плоском движении такой однородно завихренной жидкости сводится к одномерной, если ввести в рассмотрение отклонение границы $\eta(x,t)$ и подходящим образом определенный потенциал $\psi(x,t)$. Определить общую структуру лагранжиана этой системы. Найти дисперсионную зависимость $\omega(k)$ волн малой амплитуды с учетом силы тяжести $-g\mathbf{e}_y$ и поверхностного натяжения. Вычислить гамильтониан с точностью до членов третьего порядка по η и ψ. Вывести уравнение Кортевега-де-Вриза для слабонелинейной бегущей волны.

Решение: Введем потенциал $\varphi(x,y,t)$ согласно векторному равенству $\mathbf{V} = (\Omega y + \varphi_x, \quad \varphi_y)$. Условие несжимаемости записывается в виде $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$. Введем также гармонически сопряженную функцию $\theta(x,y,t)$: $\varphi_x = \theta_y, \quad \varphi_y = -\theta_x$. Легко показать, что уравнение Эйлера тождественно выполняется при условии

$$\varphi_t - \Omega\theta + \Omega y\varphi_x + \frac{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}{2} + gy + \frac{p}{\rho} = 0,$$

которое является обобщением уравнения Бернулли на случай плоских несжимаемых течений с постоянной завихренностью. Граничное значение потенциала $\varphi(x,\eta(x,t),t)$ обозначим как $\psi(x,t)$. Следовательно, уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$\eta_t = V_n\sqrt{1+\eta_x^2},$$

$$\psi_t = \left[\Omega\theta - \Omega y\varphi_x + \varphi_y V_n\sqrt{1+\eta_x^2} - (\varphi_x^2 + \varphi_y^2)/2 - gy + \tilde{\sigma}\kappa\right]\Big|_{y=\eta(x)},$$

где V_n — нормальная компонента скорости на свободной границе, $\kappa = \eta_{xx}(1+\eta_x^2)^{-3/2}$ — кривизна границы, $\tilde{\sigma} = \sigma/\rho$ — нормированное поверхностное натяжение. Заметим, что имеется связь между полной функцией тока $\theta + \Omega\eta^2/2$ и потоком жидкости через совпадающий с границей контур, начинающийся на $-\infty$ и заканчивающийся в точке x:

$$\theta + \Omega\eta^2/2 = -\hat{\partial}_x^{-1}\eta_t.$$

С учетом соотношений

$$V_n\sqrt{1+\eta_x^2} = \frac{\delta\mathcal{H}_\Omega}{\delta\psi},$$

$$\left[V^2/2 + g\eta - \tilde{\sigma}\kappa - \varphi_y V_n\sqrt{1+\eta_x^2}\right]\Big|_{y=\eta(x)} = \frac{\delta\mathcal{H}_\Omega}{\delta\eta},$$

где $\mathcal{H}_\Omega\{\eta,\psi\}$ — полная энергия системы (деленная на плотность жидкости ρ), перепишем уравнения движения в вариационной форме

$$\eta_t = \frac{\delta\mathcal{H}_\Omega}{\delta\psi}, \qquad -\psi_t - \Omega\hat{\partial}_x^{-1}\eta_t = \frac{\delta\mathcal{H}_\Omega}{\delta\eta}.$$

Отсюда следует, что лагранжиан системы имеет вид

$$\mathcal{L}_\Omega = \int \psi\eta_t dx + \frac{\Omega}{2}\int \eta_t\hat{\partial}_x^{-1}\eta dx - \mathcal{H}_\Omega\{\eta,\psi\}.$$

Квадратичная часть гамильтониана дается выражением

$$\mathcal{H}_\Omega^{(2)}\{\eta,\psi\} = \frac{1}{2}\int\left[\psi\,\hat{k}\mathrm{th}\hat{k}h\,\psi + g\eta^2 + \tilde{\sigma}\eta_x^2\right]dx.$$

Соответствующие линейные уравнения движения в Фурье-представлении имеют вид

$$\dot{\eta}_k = k\mathrm{th}kh\,\psi_k, \qquad -\dot{\psi}_k - \Omega\frac{\dot{\eta}_k}{ik} = (g+\tilde{\sigma}k^2)\eta_k,$$

так что дисперсионное соотношение выглядит следуюшим образом:

$$\omega_k(\omega_k + \Omega\,\mathrm{th}kh) = (g+\tilde{\sigma}k^2)k\mathrm{th}kh.$$

Отсюда получаем, что

$$\omega_k = -\frac{\Omega}{2}\,\mathrm{th}kh + \sqrt{(g+\tilde{\sigma}k^2)k\mathrm{th}kh + \frac{\Omega^2\mathrm{th}^2kh}{4}}.$$

Пренебрежем поверхностным натяжением и рассмотрим длинные волны, так что $\omega \approx ck + \beta k^3$. Для волн, бегущих вправо, скорость распространения и коэффициент дисперсии равны соответственно

$$c = \frac{-h\Omega + \sqrt{h^2\Omega^2 + 4gh}}{2},$$

$$\beta = \frac{h^3}{6}\left(\Omega - \frac{2g+\Omega^2 h}{\sqrt{h^2\Omega^2+4gh}}.\right).$$

Таким образом, найдены два коэффициента в уравнении KdV

$$\eta_t + c\eta_x = \alpha\eta\eta_x + \beta\eta_{xxx}.$$

Осталось найти коэффициент α перед нелинейным слагаемым. Для этого вычислим $\mathcal{H}^{(3)}_{\Omega}\{\eta,\psi\}$:

$$\mathcal{H}^{(3)}_{\Omega}\{\eta,\psi\} = \frac{\Omega^2}{6}\int \eta^3 dx + \frac{\Omega}{2}\int \eta^2\psi_x dx + \frac{1}{2}\int \eta[\psi_x^2 - (\hat{k}\mathrm{th}\hat{k}h\,\psi)^2]dx.$$

Обозначим $\psi_x = u$. Для предельно длинных волн слабонелинейные уравнения движения можно записать в следующей форме:

$$\eta_t + j_x = 0, \qquad j = (h+\eta)u + \Omega\eta^2/2,$$

$$-u_t - \Omega\eta_t = g\eta_x + \partial_x(u^2/2 + \Omega\eta u + \Omega^2\eta^2/2).$$

Выражаем u через j и η с точностью до второго порядка: $u \approx j/h - j\eta/h^2 - \Omega\eta^2/2h$, после чего имеем

$$-j_t/h - \Omega\eta_t - g\eta_x = \partial_x[(j/h+\Omega\eta)^2/2] - \partial_t(j\eta/h^2 + \Omega\eta^2/2h).$$

Умножаем это уравнение на h и заменяем в правой части $\partial_t \approx -c\partial_x$, $j \approx c\eta$. В левой части заменяем $-j_t = \partial_x^{-1}\eta_{tt}$, и затем раскладываем линейный оператор на множители,

$$\partial_x^{-1}(\partial_t - c_l\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)\eta \approx -(c+c_l)(\partial_t + c\partial_x)\eta,$$

где $c_l = (h\Omega + \sqrt{h^2\Omega^2 + 4gh})/2$ — скорость волн, бегущих влево. Получим в результате $-(c+c_l)(\partial_t + c\partial_x)\eta = A\partial_x\eta^2/2$, где

$$A = 3c\left(\frac{c}{h} + \Omega\right) + h\Omega^2 = 3g + h\Omega^2.$$

Таким образом, получено выражение для коэффициента $\alpha = -A/(c+c_l)$:

$$\alpha = -\frac{3g + h\Omega^2}{\sqrt{h^2\Omega^2 + 4gh}}.$$

23) * Две несмешивающиеся жидкости имеют одинаковую (обезразмеренную) плотность $\rho = 1$ и в состоянии покоя соприкасаются между собой вдоль плоскости $z = 0$ в безграничном пространстве. Полагая обе жидкости идеальными, с учетом поверхностного натяжения σ вывести гамильтониан, описывающий динамику границы раздела при наличии в данной системе потенциальных возмущений произвольной амплитуды. Вычислить также нелинейный сдвиг частоты для бегущей плоской волны малой амплитуды.

Решение: Каноническими переменными при наличиии свободной границы раздела Σ между двумя идеальными жидкостями являются функции $\eta(x,y,t)$ (отклонение границы от плоскости $z = 0$) и $\psi(x,y,t) = \psi_1\rho_1 - \psi_2\rho_2$, где $\psi_1(x,y,t)$ и $\psi_2(x,y,t)$ есть соответствующие граничные значения потенциала скорости в нижней и в верхней жидкостях. В нашем случае $\rho_1 = \rho_2 = 1$, и поэтому $\psi = \psi_1 - \psi_2$. Гамильтониан представляет собой сумму кинетической энергии $\mathcal{K}$ и потенциальной (поверхностной) энергии $\mathcal{A}$, где

$$\mathcal{A} = \sigma\int(\sqrt{1 + |\nabla\eta|^2} - 1)dxdy.$$

Кинетическая энергия рассматриваемой системы может быть выражена через (сингулярное) поле ротора скорости, сосредоточенное на границе и пропорциональное скачку касательной компоненты поля скорости:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{8\pi}\int\int \frac{\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{\Omega}(\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}d^3\mathbf{r}_1 d^3\mathbf{r}_2 = \frac{1}{8\pi}\int_\Sigma\int_\Sigma \frac{([d\mathbf{A}_1\times\nabla_{\mathbf{R}_1}\psi]\cdot[d\mathbf{A}_2\times\nabla_{\mathbf{R}_2}\psi])}{|\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2|},$$

где $\mathbf{R}=(x,y,\eta(x,y))\in\Sigma$ есть радиус-вектор точки на границе, элемент интегрирования по границе $d\mathbf{A}=(-\eta_x,-\eta_y,1)dxdy$, и “трехмерный” градиент вдоль границы $\nabla_{\mathbf{R}}\psi = (F_1,F_2,F_3)$ определяется соотношениями $F_1+F_3\eta_x=\psi_x$, $F_2+F_3\eta_y=\psi_y$, $F_3-F_1\eta_x-F_2\eta_y = 0$, то есть

$$F_1 = \psi_x - \frac{\eta_x(\nabla\psi\cdot\nabla\eta)}{1+|\nabla\eta|^2},\qquad F_2 = \psi_y - \frac{\eta_y(\nabla\psi\cdot\nabla\eta)}{1+|\nabla\eta|^2},\qquad F_3 = \frac{(\nabla\psi\cdot\nabla\eta)}{1+|\nabla\eta|^2}.$$

Легко видеть, что $[d\mathbf{A}\times\mathbf{F}] = (-\psi_y,\psi_x,\psi_x\eta_y-\psi_y\eta_x)dxdy$. Таким образом, гамильтониан $\mathcal{H}=\mathcal{K}+\mathcal{A}$ определяется следующим явным выражением:

$$\mathcal{H} = \int\int \frac{\nabla\psi_1\cdot\nabla\psi_2 + [\nabla\psi_1\times\nabla\eta_1]\cdot[\nabla\psi_2\times\nabla\eta_2]}{8\pi\sqrt{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^2+(\eta_1-\eta_2)^2}}d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 + \sigma\int(\sqrt{1+|\nabla\eta|^2}-1)d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{x}=(x,y)$ — радиус-вектор в горизонтальной плоскости, все градиенты двумерные, а “векторные произведения” имеют только z-компоненту.

Чтобы вычислить нелинейный сдвиг частоты бегущей волны, произведем сначала разложение гамильтониана по (четным) степеням канонических переменных и перейдем к Фурье-представлению:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \int\int \frac{\nabla\psi_1\cdot\nabla\psi_2}{8\pi|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|}d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 + \frac{\sigma}{2}\int|\nabla\eta|^2 d\mathbf{x} = \int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left(\frac{k}{4}\psi_{\mathbf{k}}\psi_{-\mathbf{k}} + \frac{\sigma k^2}{2}\eta_{\mathbf{k}}\eta_{-\mathbf{k}}\right),$$

$$\mathcal{H}^{(4)} = \int\int\left\{\frac{[\nabla\psi_1\times\nabla\eta_1]\cdot[\nabla\psi_2\times\nabla\eta_2]}{8\pi|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|} - \frac{(\nabla\psi_1\cdot\nabla\psi_2)(\eta_1-\eta_2)^2}{16\pi|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^3}\right\}d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 - \frac{\sigma}{8}\int|\nabla\eta|^4 d\mathbf{x} =$$

$$= \int(2\pi)^2\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4)M(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4)\psi_{\mathbf{k}_1}\psi_{\mathbf{k}_2}\eta_{\mathbf{k}_3}\eta_{\mathbf{k}_4}\frac{d^2\mathbf{k}_1 d^2\mathbf{k}_2 d^2\mathbf{k}_3 d^2\mathbf{k}_4}{(2\pi)^8} +$$

$$+ \int(2\pi)^2\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4)N(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4)\eta_{\mathbf{k}_1}\eta_{\mathbf{k}_2}\eta_{\mathbf{k}_3}\eta_{\mathbf{k}_4}\frac{d^2\mathbf{k}_1 d^2\mathbf{k}_2 d^2\mathbf{k}_3 d^2\mathbf{k}_4}{(2\pi)^8},$$

где функции M и N определяются выражениями

$$M(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2;\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) = \frac{[\mathbf{k}_1\times\mathbf{k}_3][\mathbf{k}_2\times\mathbf{k}_4]}{4|\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_3|} + \frac{1}{4}(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)(|\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_4|-|\mathbf{k}_1|),$$

$$N(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) = -\frac{\sigma}{8}(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{k}_2)(\mathbf{k}_3\cdot\mathbf{k}_4).$$

Заметим, что при переходе к Фурье-представлению были использованы следующие равенства:

$$\int\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{|\mathbf{x}|}d^2\mathbf{x} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|},\qquad \int\frac{(e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}-e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}})}{|\mathbf{x}|^3}d^2\mathbf{x} = 2\pi(|\mathbf{q}|-|\mathbf{k}|).$$

Исходя из вида квадратичной части гамильтониана, вводим нормальные комплексные переменные $a_{\mathbf{k}}(t)$,

$$a_{\mathbf{k}} = \frac{\sqrt{\sigma k^2}\eta_{\mathbf{k}} + i\sqrt{(k/2)}\psi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{2\omega_k}},\qquad \omega_k = \sqrt{\sigma k^3/2},$$

и затем выражаем старые переменные через новые,

$$\eta_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\omega_k}{2\sigma k^2}}(a_{\mathbf{k}} + a^*_{-\mathbf{k}}), \qquad \psi_{\mathbf{k}} = -i\sqrt{\frac{\omega_k}{k}}(a_{\mathbf{k}} - a^*_{-\mathbf{k}}). \tag{13}$$

Данное преобразование приводит квадратичную часть гамильтониана к стандартной форме

$$\mathcal{H}^{(2)} = \int \omega_k a^*_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}.$$

Теперь необходимо произвести подстановку выражений (13) в $\mathcal{H}^{(4)}$ и определить коэффициент T перед произведением $a^*_{\mathbf{k}} a^*_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}$. В результате вычислений получим

$$\begin{aligned} T = -\frac{1}{4}\Big[&M(\mathbf{k},\mathbf{k};-\mathbf{k},-\mathbf{k}) + M(-\mathbf{k},-\mathbf{k};\mathbf{k},\mathbf{k}) - \\ &-M(\mathbf{k},-\mathbf{k};\mathbf{k},-\mathbf{k}) - M(-\mathbf{k},\mathbf{k};-\mathbf{k},\mathbf{k}) - \\ &-M(\mathbf{k},-\mathbf{k};-\mathbf{k},\mathbf{k}) - M(-\mathbf{k},\mathbf{k};\mathbf{k},-\mathbf{k})\Big] + \\ +\frac{\omega_k^2}{4\sigma^2 k^4}\Big[&N(\mathbf{k},\mathbf{k},-\mathbf{k},-\mathbf{k}) + N(-\mathbf{k},-\mathbf{k},\mathbf{k},\mathbf{k}) + \\ &+N(\mathbf{k},-\mathbf{k},\mathbf{k},-\mathbf{k}) + N(-\mathbf{k},\mathbf{k},-\mathbf{k},\mathbf{k}) \\ &+N(\mathbf{k},-\mathbf{k},-\mathbf{k},\mathbf{k}) + N(-\mathbf{k},\mathbf{k},\mathbf{k},-\mathbf{k})\Big] = \\ &= \frac{k^3}{8} + \frac{\omega_k^2}{4\sigma^2 k^4}\left(-\frac{\sigma}{8}\right)6k^4 = \frac{1}{32}k^3. \end{aligned}$$

Пусть главная гармоника бегущей волны имеет нормальную комплексную амплитуду $a(t)$, так что $\eta(x,t) \approx [2\omega_k/(\sigma k^2)]^{1/2}\mathrm{Re}[a(t)\exp(ikx)]$. Тогда $a(t) = a_0\exp(-i\omega_k t - i\delta\omega_{nl}t)$, причем нелинейный сдвиг частоты равен $\delta\omega_{nl} = 2T|a_0|^2$. В терминах обычной амплитуды $\eta \approx \mathrm{Re}[A\exp(ikx)]$, то есть $A = [2\omega_k/(\sigma k^2)]^{1/2}a$. Тогда имеем

$$\delta\omega_{nl} = \frac{1}{16}k^3\frac{\sigma k^2}{2\omega_k}|A|^2 = \frac{1}{16}\omega_k k^2|A|^2.$$

Заметим, что нелинейное уравнение Шредингера для волновой огибающей имеет следующий вид:

$$i\left(\frac{A_t}{\omega_k} + \frac{3}{2}\frac{A_x}{k}\right) = -\frac{3}{8k^2}A_{xx} - \frac{3}{4k^2}A_{yy} + \frac{1}{16}k^2|A|^2A.$$

Интересно отметить, что нелинейность здесь действует дефокусирующим образом по обоим горизонтальным направлениям, в отличие от обычных морских волн, где, как известно, продольное направление — фокусирующее, а поперечное – дефокусирующее.

24) * (Простейшая модель внутренних волн). Над бесконечно глубоким слоем жидкости с плотностью $\rho_1 = 1$ располагается слой чуть менее тяжелой жидкости, имеющий в равновесии толщину h (плотность второй жидкости $\rho_2 = 1 - \alpha$, где $\alpha \ll 1$). Верхняя граница второго слоя поддерживается горизонтальной (плоская “крышка”). Считая обе жидкости идеальными и рассматривая только потенциальные течения в каждой из них, с учетом силы тяжести получить выражение для гамильтониана данной системы в терминах канонических переменных η и

$\psi = \rho_1\psi_1 - \rho_2\psi_2 \approx \psi_1 - \psi_2$, где $\eta(x,y,t)$ — отклонение границы раздела от горизонтальной плоскости $z=-h$, а $\psi_{1,2}(x,y,t)$ представляют собой соответствующие граничные значения потенциала скорости. В длинноволновом пределе вывести приближенное уравнение для эволюции слабо-нелинейной бегущей волны — аналог уравнения KdV.

Указание: При вычислении кинетической энергии пренебречь разностью плотностей (приближение Буссинеска).

Решение: Гамильтониан есть сумма кинетической и потенциальной энергий. Потенциальная энергия в поле тяжести есть $\mathcal{U} = (\tilde{g}/2)\int \eta^2 d\mathbf{x}$, где $\tilde{g} = \alpha g$. Пренебрежение разностью плотностей в интеграле кинетической энергии позволяет выразить соответствующий функционал через разность касательных скоростей вдоль границы раздела, как в задаче #23. Кроме того, наличие верхней плоской границы может быть учтено “методом изображения”. В результате гамильтониан представляется в виде

$$\mathcal{H} = \int\int \frac{\nabla\psi_1\cdot\nabla\psi_2 + [\nabla\psi_1\times\nabla\eta_1]\cdot[\nabla\psi_2\times\nabla\eta_2]}{8\pi\sqrt{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^2+(\eta_1-\eta_2)^2}}d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 +$$

$$+\int\int \frac{-\nabla\psi_1\cdot\nabla\psi_2 + [\nabla\psi_1\times\nabla\eta_1]\cdot[\nabla\psi_2\times\nabla\eta_2]}{8\pi\sqrt{|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^2+(2h-\eta_1-\eta_2)^2}}d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 +$$

$$+\frac{\tilde{g}}{2}\int \eta^2 d\mathbf{x}.$$

Для получения аналога KdV достаточно произвести разложение гамильтониана до третьего порядка и перейти к длинноволновому пределу:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left(\frac{k}{4}[1-e^{-2kh}]\psi_{\mathbf{k}}\psi_{-\mathbf{k}} + \frac{\tilde{g}}{2}\eta_{\mathbf{k}}\eta_{-\mathbf{k}}\right) \approx \int\left(\frac{h}{2}(\nabla\psi)^2 - \frac{h^2}{2}\psi\hat{k}^3\psi + \frac{\tilde{g}}{2}\eta^2\right)d\mathbf{x},$$

$$\mathcal{H}^{(3)} = -\frac{h}{4\pi}\int\int \frac{(\nabla\psi_1\cdot\nabla\psi_2)(\eta_1+\eta_2)}{(|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2|^2+4h^2)^{3/2}}d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \approx -\frac{1}{2}\int \eta(\nabla\psi)^2 d\mathbf{x}.$$

Мы видим, что бездисперсионная часть гамильтониана имеет такую же структуру, как и для обычных поверхностных волн (см. задачу #21, а также задачу #22 для случая $\Omega = 0$), с точностью до замены знаков у канонических переменных η и ψ и переопределения ускорения свободного падения. Существенно отличается только дисперсионная поправка, так что закон дисперсии длинных линейных волн есть $\omega \approx ck(1-hk/2)$, где $c = \sqrt{\tilde{g}h}$. Поэтому требуемое уравнение для эволюции бегущей волны отличается от ответа задачи #21 только последним членом и гласит:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = -\frac{3}{2}uu_x - \frac{ch}{2}\hat{H}u_{xx},$$

где $u = -\psi_x$, и введен оператор Гильберта $\hat{H} = i\ \mathrm{sign}\ \hat{k}$. Уравнение такого вида называется уравнением Бенджамина-Оно.

25) * В уравнении Бенджамина-Оно $q_t + 2qq_x + \hat{H}q_{xx} = 0$, где $\hat{H} = i\ \mathrm{sign}\ \hat{k}$ — оператор Гильберта (см. задачу #24), сделать подстановку (разложение по полюсам)

$$q(x,t) = \sum_{n=1}^{N}\frac{-i}{x-\zeta_n(t)} + \sum_{n=1}^{N}\frac{i}{x-\zeta_n^*(t)}, \qquad \mathrm{Im}\ \zeta_n(t) > 0,$$

и получить замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных величин $\zeta_n(t)$. Решить полученную систему при $N = 2$.

Решение: Существенно, что указанная подстановка имеет вид $q(x) = f_-(x) + f_+(x)$, где аналитическая функция $f_-(z)$ не имеет особенностей в нижней полуплоскости комплексной переменной z, а функция $f_+(z)$ не имеет особенностей в верхней полуплоскости. При этом $f_+(x) = f_-^*(x)$. Оператор Гильберта связывает действительные и мнимые части функций $f_\pm$ на действительной оси: $\mathrm{Im}\, f_\pm(x) = \mp\hat{H}[\mathrm{Re}\, f_\pm(x)] = \mp\hat{H}q(x)/2$. Поэтому имеет место равенство $\hat{H}q_{xx} = -if_-''(x) + if_+''(x)$. После данного замечания остается подставить соответствующие выражения

$$q_t = \sum_{n=1}^{N} \frac{-i\dot{\zeta}_n}{(x-\zeta_n)^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{i\dot{\zeta}_n^*}{(x-\zeta_n^*)^2},$$

$$q_x = \sum_{n=1}^{N} \frac{i}{(x-\zeta_n)^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{-i}{(x-\zeta_n^*)^2},$$

$$\hat{H}q_{xx} = \sum_{n=1}^{N} \frac{-2}{(x-\zeta_n)^3} + \sum_{n=1}^{N} \frac{-2}{(x-\zeta_n^*)^3}$$

в уравнение Бенджамина-Оно и произвести переразложение по полюсам в нелинейном члене. В результате оказывается, что вычеты первого и третьего порядков в левой части уравнения зануляются тождественно, а обращение в нуль вычетов второго порядка обеспечивается следующей системой уравнений:

$$-i\dot{\zeta}_n - \sum_{m} \frac{2}{(\zeta_n - \zeta_m^*)} + \sum_{m\neq n} \frac{2}{(\zeta_n - \zeta_m)} = 0.$$

При $N = 2$ обозначим $\zeta_1 = a_1 + ib_1$, $\zeta_2 = a_2 + ib_2$ и выпишем в явном виде четыре действительных дифференциальных уравнения:

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{b_1} + \frac{2(b_1+b_2)}{(a_1-a_2)^2+(b_1+b_2)^2} - \frac{2(b_1-b_2)}{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2},$$

$$\dot{a}_2 = \frac{1}{b_2} + \frac{2(b_1+b_2)}{(a_1-a_2)^2+(b_1+b_2)^2} - \frac{2(b_2-b_1)}{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2},$$

$$\dot{b}_1 = \frac{2(a_1-a_2)}{(a_1-a_2)^2+(b_1+b_2)^2} - \frac{2(a_1-a_2)}{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2},$$

$$\dot{b}_2 = \frac{2(a_2-a_1)}{(a_1-a_2)^2+(b_1+b_2)^2} - \frac{2(a_2-a_1)}{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}.$$

Складывая два последних уравнения, получаем первый интеграл $b_1 + b_2 = B = const$. Кроме, того из закона сохранения величины $\int q^2 dx$ следует другой интеграл движения:

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \frac{4(b_1+b_2)}{(a_1-a_2)^2+(b_1+b_2)^2} \equiv \frac{4(b_1+b_2)}{(b_2+b_1)^2-(b_2-b_1)^2} + \frac{4(b_1+b_2)}{(a_1-a_2)^2+(b_1+b_2)^2} = 4BC,$$

где $C = const$. Складывая два первых уравнения нашей системы, получаем, что $a_1+a_2 = 4BCt + A$, где A— третья произвольная константа.

Далее рассмотрим величины $u = (a_2 - a_1)^2 - (b_2 - b_1)^2$ и $v = 2(a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$. Для u и v с учетом уже найденных интегралов движения имеем два простых уравнения:

$$\dot{u} = -4Cv, \qquad \dot{v} = -8(B^2C - 1).$$

Отсюда $v = -8(B^2C - 1)(t - t_0)$, $u = 16C(B^2C - 1)(t - t_0)^2 + U_0$, где t_0 — четвертая произвольная постоянная, а отрицательная константа U_0 связана с B и C соотношением

$$\frac{1}{B^2 + U_0} + \frac{1}{B^2} = C.$$

Тем самым система для $N = 2$ полностью проинтегрирована. Заметим еще, что поскольку используемое нами разложение по полюсам равносильно формуле

$$q(x,t) = 2 \ \mathrm{Im} \ \left(\frac{\partial_x D_N(x,t)}{D_N(x,t)}\right),$$

где $D_N(z,t)$ — полином N-ой степени по комплексной переменной z, с корнями в верхней полуплоскости, то с учетом равенств $(\zeta_1 + \zeta_2) = 4CB(t - t_0) + A_0 + iC$, $u + iv = (\zeta_2 - \zeta_1)^2$ получаем, что D_2 является также полиномом второй степени и по t:

$$D_2(x,t) = (x - \zeta_1)(x - \zeta_2) = x^2 - x(\zeta_1 + \zeta_2) + [(\zeta_1 + \zeta_2)^2 - (\zeta_2 - \zeta_1)^2]/4 =$$
$$= x^2 - x[4CB(t - t_0) + A_0 + iC] +$$
$$+(1/4)[(4CB(t - t_0) + A_0 + iC)^2 - 16C(B^2C - 1)(t - t_0)^2 - U_0 + 8i(B^2C - 1)(t - t_0)].$$

На самом деле свойство полиномиальности $D_N(x,t)$ по обеим переменным имеет место при произвольном N. Доказательство этого утверждения выходит за рамки данной задачи.

26) * В идеальной жидкости, заполняющей верхнюю полуплоскость, область строго потенциального течения отделена от границы $y = 0$ слоем, в котором ротор скорости равен константе Ω. В стационарном состоянии завихренный слой имеет толщину h и поле скорости в нем есть $\mathbf{V}_0 = \Omega(h - y)\mathbf{e}_x$, тогда как в потенциальной области скорость течения равна нулю. Используя тот факт, что динамика возмущенной границы $y = \eta(x,t)$ между слоями имеет неканоническую гамильтонову структуру $\eta_t = -\Omega^{-1}\partial_x(\delta\mathcal{H}/\delta\eta)$, где $\mathcal{H}\{\eta\}$ есть (кинетическая) энергия жидкости, вывести упрощенное уравнение движения для умеренно длинных нелинейных волн в такой системе с учетом дисперсии.

Решение: Кинетическая энергия двумерного течения выражается через функцию тока $\psi(\mathbf{r},t)$ (предполагается, что $\psi = 0$ при $y = 0$):

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int_{y>0} (\nabla\psi)^2 d\mathbf{r} = -\frac{1}{2}\int_{y>0} \psi\Delta\psi \, d\mathbf{r}.$$

В терминах завихренности $\omega = -\Delta\psi$, с использованием известной функции Грина для оператора Лапласа на полуплоскости, интеграл переписывается следующим образом:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{8\pi}\int\int \ln\left(\frac{(y_1 + y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}{(y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2}\right)\omega(x_1,y_1)\omega(x_2,y_2)dx_1dy_1dx_2dy_2.$$

Для кусочно-постоянного распределения завихренности имеем

$$\mathcal{H} = \frac{\Omega^2}{8\pi}\int dx_1 \int dx_2 \int\limits_0^{\eta(x_1)} dy_1 \int\limits_0^{\eta(x_2)} dy_2 \ln\left(\frac{(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2}{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}\right).$$

С целью получения длинноволновой асимптотики преобразуем этот интеграл с помощью формулы

$$\frac{1}{8\pi}\ln\left(\frac{(y_1+y_2)^2+(x_1-x_2)^2}{(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2}\right) = \int \frac{(e^{-|y_1-y_2||k|}-e^{-|y_1+y_2||k|})}{4|k|}e^{ik(x_1-x_2)}\frac{dk}{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(|y_1+y_2|-|y_1-y_2|-\frac{|k|}{2}[(y_1+y_2)^2-(y_1-y_2)^2]+\cdots\right]e^{ik(x_1-x_2)}\frac{dk}{2\pi}.$$

После подстановки и простого интегрирования по dy_1dy_2 получим длинноволновое разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 + \cdots$, где

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\Omega^2}{6}\int \eta^3 dx, \qquad \mathcal{H}_1 = \frac{\Omega^2}{8}\int \eta^2 \hat{H}\hat{\partial}_x \eta^2 dx,$$

причем $\hat{H}$ — оператор Гильберта (см. задачи #24 и #25). В результате требуемое уравнение движения длинных, полностью нелинейных волн в рассматриваемой системе имеет следующий вид:

$$\eta_t + \Omega\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta^2/2 + \eta\hat{H}(\eta\eta_x)\right] = 0.$$

Отметим, что в слабонелинейном режиме, когда $\eta(x,t) = h + q(x,t)$ и $|q(x,t)| \ll h$, динамика малой функции $q(x,t)$ подчиняется уравнению Бенджамина-Оно:

$$\Omega^{-1}q_t + (h+q)q_x + h^2\hat{H}q_{xx} \approx 0.$$

27) Исследовать на устойчивость движение N одинаковых точечных вихрей, расположенных в вершинах правильного N-угольника.

Решение: В обезразмеренном виде уравнения движения вихрей имеют вид

$$-i\dot{z}_n^* = \sum_{m\neq n}^{N}\frac{1}{z_n - z_m}, \qquad n = 1,\ldots,N.$$

В стационарном режиме N-угольник вращается как целое с угловой частотой Ω, которая определяется выражением

$$\Omega = \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{1-e^{2\pi i n/N}}.$$

Для вычисления этой суммы запишем ее в виде контурного интеграла в комплексной плоскости:

$$\Omega = \frac{N}{2\pi i}\oint \frac{1}{(1-z)}\frac{1}{(z^N-1)}\frac{dz}{z},$$

причем контур интегрирования охватывает все корни N-ой степени единицы, кроме $z = 1$, и не охватывает также точку $z = 0$. Далее деформируем контур таким образом, чтобы он охватывал только точки $z = 0$ и $z = 1$ в "отрицательном" направлении. Находя два соответствующих вычета, получаем, что $\Omega = (N-1)/2$.

Далее представляем слабо-возмущенное движение вихрей в виде

$$z_n = e^{2\pi in/N - i\Omega t}[1 + \alpha_n(t)]$$

и линеаризуем уравнения движения относительно малых величин α_n:

$$\frac{(N-1)}{2}\alpha_n^* - i\dot{\alpha}_n^* = \sum_{m\neq n} \frac{\alpha_m e^{2\pi i(m-n)/N} - \alpha_n}{[1 - e^{2\pi i(m-n)/N}]^2}$$

Ищем частные решения линейной системы в виде

$$\alpha_n(t) = A_k e^{2\pi ikn/N} + A_{-k}e^{-2\pi ikn/N}.$$

Для амплитуд получаем простые уравнения

$$\frac{(N-1)}{2}A_{-k}^* - i\dot{A}_{-k}^* = F_k A_k, \qquad F_k = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{e^{2\pi i(k+1)n/N} - 1}{[1 - e^{2\pi in/N}]^2}.$$

Чтобы вычислить величины F_k при $0 \le k < N$, представим соответствующие суммы в виде контурных интегралов, аналогично тому, как это было сделано для Ω:

$$F_k = \frac{N}{2\pi i}\oint \frac{(z^{k+1} - 1)}{(1-z)^2(z^N - 1)}\frac{dz}{z},$$

Деформируя контур и находя вычеты в точках $z = 0$ и $z = 1$, получаем, что $F_k = (k-1)(N-k-1)/2$. В силу N-периодичности индекс $(-k)$ эквивалентен индексу $(N-k)$. Поэтому имеем следующие пары уравнений:

$$-i\dot{A}_{N-k}^* + \frac{(N-1)}{2}A_{N-k}^* = \frac{(N-k-1)(k-1)}{2}A_k,$$

$$i\dot{A}_k + \frac{(N-1)}{2}A_k = \frac{(k-1)(N-k-1)}{2}A_{N-k}^*,$$

решая которые путем подстановки $(A_k, A_{N-k}^*) \propto e^{\lambda_k t}$, находим собственные значения линейной системы дифференциальных уравнений:

$$\lambda_k^2 = \frac{1}{4}[(k-1)^2(N-k-1)^2 - (N-1)^2].$$

Для устойчивости движения N-угольника необходимо, чтобы при заданном N все λ_k^2 были отрицательными. Заметим, что наименее устойчивы моды с номерами вблизи $N/2$, то есть при $k = [N/2]$ (квадратные скобки означают целую часть). Вычисляя соответствующие значения для различных N, получим, что случаи $N \le 6$ устойчивы, при $N = 7$ наименее устойчивая мода имеет нулевое собственное значение и поэтому требуется дополнительный нелинейный анализ, а при $N > 7$ движение заведомо неустойчиво.

28) Точечный вихрь с циркуляцией Γ движется в плоскости вдоль тонкой прямолинейной стенки, на расстоянии b от нее. В стенке имеется отверстие шириной $2a$. Найти фазовые траектории вихря в такой системе. При каком соотношении между b и

a вихрь пройдет в отверстие? Как изменится ответ, если имеется дополнительное потенциальное течение с потоком Q через отверстие ?

Решение: Область течения получается конформным отображением $z = a\sin w$ полосы $-\pi/2 < u < \pi/2$, где $z = x + iy$, $w = u + iv$. Функция тока, создаваемая вихрем, в w-представлении имеет вид

$$\psi(u,v) = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left|\frac{\sin\frac{1}{2}(w + \bar{W} - \pi)}{\sin\frac{1}{2}(w - W)}\right|,$$

где $W = U + iV$ – координата вихря в w-плоскости. Эта гармоническая функция имеет логарифмическую особенность при $w = W$ и обращается в нуль на границе области – при $u = \pm\pi/2$. Функция тока, связанная с потоком Q, есть просто $(Q/\pi)u$. Гамильтониан системы дается формулой

$$H(U,V) = \frac{\Gamma}{2}\psi(U + d_w, V) + \frac{\Gamma Q}{\pi}U + \mathrm{const},$$

где переменный в w-представлении (малый) размер вихря d_w связан соотношением $d = |z'(W)|d_w$ с неизменным в z-представлении размером d вихря, выступающим в роли параметра регуляризации. Таким образом, гамильтониан вихря есть

$$\begin{aligned} H(U,V) &= \frac{\Gamma Q}{\pi}U + \frac{\Gamma^2}{4\pi}\ln(\cos U\cdot|\cos(U+iV)|) + \mathrm{const} = \\ &= \frac{\Gamma^2}{4\pi}\ln\left(\cos U\sqrt{\cos^2 U + \mathrm{sh}^2 V}\cdot\exp(4QU/\Gamma)\right). \end{aligned} \tag{14}$$

Фазовые траектории вихря определяются линиями уровня гамильтониана. В системе имеется одна седловая точка $U = U_*$, $V = 0$, где $\mathrm{tg}\,U_* = 2Q/\Gamma$, так что уравнение соответствующих сепаратрис есть

$$\cos U\sqrt{\cos^2 U + \mathrm{sh}^2 V}\cdot\exp(4QU/\Gamma) = \left(1 + (2Q/\Gamma)^2\right)^{-1}\exp(\frac{4Q}{\Gamma}\mathrm{arctg}\frac{2Q}{\Gamma}).$$

Критические значения b_* определяются значениями y на сепаратрисах при $U \to \mp\pi/2$. Поскольку при этом $\cos U \to 0$, $\cos U\,\mathrm{sh}V = y/a$, то

$$(b_*/a)\exp(\mp 2\pi Q/\Gamma) = \left(1 + (2Q/\Gamma)^2\right)^{-1}\exp(\frac{4Q}{\Gamma}\mathrm{arctg}\frac{2Q}{\Gamma}).$$

Таким образом,

$$b_* = a\left(1 + (2Q/\Gamma)^2\right)^{-1}\exp(\pm\frac{2\pi Q}{\Gamma} + \frac{4Q}{\Gamma}\mathrm{arctg}\frac{2Q}{\Gamma}),$$

причем знак плюс в последней формуле относится к случаю, когда вихрь приближается к отверстию по течению, а минус – против течения. При $b < b_*$ вихрь пройдет в отверстие.

29) В условиях предыдущей задачи $Q = 0$, но имеется однородный “внешний” поток со скоростью C в горизонтальном направлении. Найти фазовые траектории точечного вихря с циркуляцией Γ в такой системе. Показать, что при достаточно больших значениях Γ возможно периодическое (финитное) движение вихря.

Решение: Траектории вихря определяются линиями уровня гамильтониана

$$H = \frac{\Gamma^2}{4\pi} \ln \left[\cos U \sqrt{\cos^2 U + \text{sh}^2 V} \exp \left(\frac{4\pi a C}{\Gamma} \cos U \text{sh} V \right) \right].$$

При $\beta = \Gamma/(8\pi a C) > 1$ в системе имеется устойчивая особая точка $U = 0$, $\text{sh}V = -\beta - \sqrt{\beta^2 - 1}$, в окрестности которой фазовые траектории замкнуты.

30) Область двумерного течения идеальной жидкости представляет собой верхнюю полуплоскость, на которой имеются два разреза, тянущиеся вдоль единичной окружности $z = \exp i\varphi$, где $0 \le \varphi \le \alpha$ и $\pi - \alpha \le \varphi \le \pi$, $\alpha < \pi/2$. При каких значениях α единичный точечный вихрь может оказаться захваченным в области $|z| < 1$?
Решение: Аналитическая функция

$$w(z) = z + \frac{1}{z} + \sqrt{\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 4\cos^2 \alpha}$$

конформно отображает область течения на верхнюю полуплоскость. Фазовые траектории вихря совпадают с линиями уровня гамильтониана

$$H(x, y) = \frac{\Gamma^2}{4\pi} \ln \left[\frac{\text{Im}\, w(x + iy)}{|w'(x + iy)|} \right] = \frac{\Gamma^2}{8\pi} \ln F(x, y).$$

Рассмотрим гамильтониан на линии симметрии системы – при $x = 0$. Обозначив $\xi = y^2$, получим

$$F(0, \sqrt{\xi}) = f(\xi) = \xi - \frac{4\xi^2 \sin^2 \alpha}{(1 + \xi)^2}.$$

Нетрудно показать, что при $\sin^2 \alpha < 27/32$ функция $f(\xi)$ монотонно возрастает, а при $\sin^2 \alpha > 27/32$ у нее имеется максимум и минимум. Максимум соответствует устойчивой особой точке, вблизи которой траектории вихря замкнуты.

31) Неодносвязная область двумерного течения идеальной жидкости представляет собой верхнюю полуплоскость, из которой удалили “остров” — круг радиуса R с центром в точке $(0, A)$, где $A > R$. Вокруг “острова” имеется потенциальное течение с циркуляцией Γ_0. Найти фазовые траектории точечного вихря с циркуляцией Γ в такой системе.

Решение: Используем конформное отображение $z = \alpha \,\text{tg}\, w$, где $w = u + iv$, $\alpha = \sqrt{A^2 - R^2}$, $-\pi/2 < u < \pi/2$, $0 < v < v_*$, $\text{ch} 2v_* = A/R$. Функция тока, создаваемая вихрем, в w-представлении имеет вид

$$\psi(u, v) = \frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \ln \left| \frac{\text{sh} \frac{\pi}{2v_*}(w - \bar{W} - \pi m)}{\text{sh} \frac{\pi}{2v_*}(w - W - \pi m)} \right|, \tag{15}$$

где $W = U + iV$ – координата вихря в w-плоскости. Эта гармоническая функция удовлетворяет всем необходимым требованиям: она имеет в области течения логарифмическую особенность при $w = W$, обращается в нуль при $v = 0$ и при $v = v_*$. Кроме того, она π-периодична по координате u. Функция тока, связанная с течением Γ_0, есть просто $(\Gamma_0/\pi)v$. Гамильтониан системы дается формулой

$$H(U, V) = \frac{\Gamma}{2} \psi(U, V + |z'(U + iV)|^{-1} d) + \frac{\Gamma \Gamma_0}{\pi} V + \text{const},$$

где $d \ll \alpha$ – малый постоянный параметр регуляризации – размер вихря. Подстановка выражения (15) дает

$$
\begin{aligned}
H(U,V) &= \frac{\Gamma\Gamma_0}{\pi}V + \frac{\Gamma^2}{4\pi}\ln\left\{F\left(\sin\left[\frac{\pi}{v_*}V\right]\right)\cdot\frac{|z'(U+iV)|}{\alpha}\right\} + const = \\
&= \frac{\Gamma^2}{4\pi}\ln\left(\frac{F(\sin[\pi V/v_*])\exp(4\Gamma_0 V/\Gamma)}{\operatorname{sh}^2 V + \cos^2 U}\right), \qquad (16)
\end{aligned}
$$

где функция $F(\sin[\pi V/v_*])$ представляет собой бесконечное произведение

$$
F(\sin[\pi V/v_*]) = \sin[\pi V/v_*]\prod_{m=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{\sin^2[\pi V/v_*]}{\operatorname{sh}^2(\pi^2 m/2v_*)}\right).
$$

В случае, когда $v_* \ll \pi^2/2$, это произведение сходится очень быстро, и при его вычислении достаточно ограничиться несколькими первыми m.

Фазовые траектории вихря совпадают с линиями уровня гамильтониана.

32) Свести задачу о движении двух точечных вихрей (с завихренностями Γ_1 и Γ_2) внутри круга к гамильтоновой системе с одной степенью свободы.

Решение: Функция тока системы N точечных вихрей внутри круга $x^2 + y^2 < 1$ определяется формулой

$$
\psi(x,y) = \psi(z) = \sum_n \frac{\Gamma_n}{2\pi}\ln\left|\frac{1 - z\bar{Z}_n}{z - Z_n}\right|,
$$

где $z = x+iy$, и $Z_n = X_n + iY_n$ – комплексные координаты вихрей. Эта функция гармоническая, имеет логарифмические особенности в точках нахождения вихрей и обращается в нуль на границе области течения – при $|z| = 1$. Гамильтониан этой системы есть

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\sum_m \Gamma_m\psi(Z_m + d_m) \ + C(d_1,\ldots,d_N) = \\
&= \sum_n \frac{\Gamma_n^2}{4\pi}\ln(1 - |Z_n|^2) + \sum_{n\neq m}\frac{\Gamma_m\Gamma_n}{4\pi}\ln\left|\frac{1 - Z_m\bar{Z}_n}{Z_m - Z_n}\right|, \qquad (17)
\end{aligned}
$$

где малые параметры $d_1,\ldots,d_N$ – размеры вихрей – необходимы для регуляризации гамильтониана. В лагранжиане

$$
L = \sum_n \frac{i\Gamma_n}{2}\dot{Z}_n\bar{Z}_n - H
$$

можно заменить переменные: $Z_n = \sqrt{\rho_n}\exp(i\phi_n)$. В результате этой замены получим

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_n\left[-\frac{\Gamma_n}{2}\rho_n\dot{\phi}_n - \frac{\Gamma_n^2}{4\pi}\ln(1-\rho_n)\right] - \\
&\quad - \sum_{n>m}\frac{\Gamma_m\Gamma_n}{4\pi}\ln\left(\frac{1 + \rho_m\rho_n - 2\sqrt{\rho_m\rho_n}\cos(\phi_n - \phi_m)}{\rho_m + \rho_n - 2\sqrt{\rho_m\rho_n}\cos(\phi_n - \phi_m)}\right). \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Если имеется всего лишь два вихря, то удобно перейти к каноническим переменным Φ, M и ϕ, μ по формулам

$$
\phi_1 = \Phi + \frac{\phi}{2}, \qquad \phi_2 = \Phi - \frac{\phi}{2},
$$

$$M=-\frac{\Gamma_1\rho_1+\Gamma_2\rho_2}{2},\qquad \mu=\frac{\Gamma_2\rho_2-\Gamma_1\rho_1}{4}.$$

Поскольку обобщенная координата Φ является циклической, то соответствующий ей импульс M =const. Подставляя $\rho_1=-(2\mu+M)/\Gamma_1$ и $\rho_2=(2\mu-M)/\Gamma_2$ в гамильтониан исходной задачи, получим в результате гамильтониан для ϕ и μ, где M играет роль параметра:

$$H(\phi,\mu)=\frac{\Gamma_1^2}{4\pi}\ln\left[1+\frac{(M+2\mu)}{\Gamma_1}\right]+\frac{\Gamma_2^2}{4\pi}\ln\left[1+\frac{(M-2\mu)}{\Gamma_2}\right]+$$
$$+\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{4\pi}\ln\left(\frac{1+(M^2-4\mu^2)/\Gamma_1\Gamma_2-2\sqrt{(M^2-4\mu^2)/\Gamma_1\Gamma_2}\cos\phi}{2\mu(\Gamma_2^{-1}-\Gamma_1^{-1})-M(\Gamma_2^{-1}+\Gamma_1^{-1})-2\sqrt{(M^2-4\mu^2)/\Gamma_1\Gamma_2}\cos\phi}\right).$$

33) Найти канонические переменные и выписать гамильтониан для системы тонких соосных вихревых колец в трехмерном пространстве.

34) Модель Лапласовского роста конечной двумерной области D с гладкой границей ∂D задается уравнением $V_{\partial D}=|\nabla f||_{\partial D}$, где $V_{\partial D}$ – скорость продвижения границы в направлении внешней нормали, $f(x,y)$ – гармоническая вне области D функция ($f_{xx}+f_{yy}=0$) с условиями $f|_{\partial D}=0$, $f|_\infty\approx\ln\sqrt{x^2+y^2}$. Форму растущей области можно описывать аналитической при $|w|\geq 1$ функцией $z(w,t)$, которая конформно отображает внешность единичной окружности на внешность области D, так что $(x+iy)|_{\partial D}=z(e^{i\xi},t)$. Уравнение движения при этом выглядит следующим образом:

$$\mathrm{Im}(z_t\bar{z}_\xi)=-1. \tag{19}$$

Данная система допускает частные решения вида

$$z(w,t)=R(t)w+A(t)+\sum_{n=1}^{N}q_n\ln[w-B_n(t)], \tag{20}$$

где N – произвольное целое число, большее единицы, q_n – комплексные константы с равной нулю суммой ($\sum q_n=0$), $R(t)$ – действительная функция, $A(t)$ и $B_n(t)$ – комплексные функции (очевидно,что все $|B_n(t)|<1$). Требуется вывести и проинтегрировать систему обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих динамику величин $R(t)$, $A(t)$ и $B_n(t)$.

Решение: Подставляем выражение (20) в уравнение (19):

$$\mathrm{Im}\left[\left(\dot{R}w+\dot{A}-\sum_m\frac{q_m\dot{B}_m}{w-B_m}\right)\left(-i\frac{R}{w}-i\sum_n\frac{\bar{q}_n}{1-w\bar{B}_n}\right)\right]=-1.$$

После раскрытия скобок и разложения на простые дроби получим с учетом $\sum q_n=0$ уравнение следующего вида:

$$\dot{\bar{a}}Rw+\dot{a}Rw^{-1}+\sum_n\frac{q_n\dot{b}_nB_n}{w-B_n}+\sum_n\frac{\bar{q}_n\dot{\bar{b}}_n\bar{B}_nw}{1-w\bar{B}_n}+\dot{d}=2,$$

где

$$\dot a = \dot A + \sum_n q_n \frac{\dot B_n}{B_n},$$

$$\dot b_n = \frac{\dot R}{B_n} - R\frac{\dot B_n}{B_n^2} + \dot{\bar A} - \sum_m \bar q_m \frac{\dot B_n \bar B_m + B_n \dot{\bar B}_m}{1 - B_n \bar B_m},$$

$$\dot d = 2R\dot R - \sum_n \sum_m q_n \bar q_m \frac{B_n \dot{\bar B}_m + \dot B_n \bar B_m}{1 - B_n \bar B_m}.$$

Интегрируя уравнения в полных производных $\dot a = 0$, $\dot b_n = 0$, $\dot d = 2$, приходим к ответу

$$A + \sum_n q_n \ln B_n = \alpha,$$

$$\frac{R}{B_n} + \bar A + \sum_m \bar q_m \ln\left(1 - B_n \bar B_m\right) = \beta_n,$$

$$R^2 + \sum_n \sum_m q_n \bar q_m \ln(1 - B_n \bar B_m) = 2t + \delta,$$

где α, β_n и δ — константы интегрирования.

35) * (**Матричная форма многосолитонного решения НУШ** [T. Aktosun *et al.*, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010) 025202]). Пусть имеется постоянная комплексная квадратная матрица A размера $n \times n$, у которой все собственные числа μ_k расположены в правой полуплоскости, то есть $\operatorname{Re}\mu_k > 0$. Возьмем произвольный n-компонентный (постоянный) комплексный столбец B и произвольную (постоянную) комплексную строку C той же длины. Построим две вспомогательные квадратные самосопряженные матрицы $Q = Q^\dagger$ и $N = N^\dagger$ (символ $\dagger$ означает транспонирование с последующим комплексным сопряжением) путем решения линейных матричных уравнений

$$QA + A^\dagger Q = C^\dagger C, \qquad AN + NA^\dagger = BB^\dagger. \tag{21}$$

В общем виде решения этих уравнений даются формулами

$$Q = \int_0^{+\infty} ds [Ce^{-As}]^\dagger [Ce^{-As}], \qquad N = \int_0^{+\infty} ds [e^{-As}B][e^{-As}B]^\dagger,$$

где матричные экспоненты определены стандартным образом [1].

Затем сформируем квадратную матрицу $F(x,t)$ и скалярную величину $u(x,t)$ следующим образом:

$$F(x,t) = \exp(2A^\dagger x - 4i(A^\dagger)^2 t) + Q\exp(-2Ax - 4iA^2 t)N,$$

$$u(x,t) = -2B^\dagger F^{-1}(x,t) C^\dagger. \tag{22}$$

[1] В частности, если матрица $A = \mathrm{Diag}[a_j/2]$, то $N_{jk} = 2B_j B_k^*/(a_j + a_k^*)$, $Q_{jk} = 2C_j^* C_k/(a_j^* + a_k)$.

Аналогично построим квадратную матрицу $G(x,t)$ и скалярную величину $v(x,t)$:

$$G(x,t) = \exp(-2Ax - 4i(A^2t) + N\exp(2A^\dagger x - 4i(A^\dagger)^2 t)Q,$$

$$v(x,t) = -2CG^{-1}(x,t)B. \tag{23}$$

Требуется доказать, что скалярные функции $u(x,t)$ и $v(x,t)$ обе являются решениями нелинейного уравнения Шредингера, то есть

$$iu_t + u_{xx} + 2|u|^2 u \equiv 0, \qquad iv_t + v_{xx} + 2|v|^2 v \equiv 0. \tag{24}$$

Доказательство приведем только для $v(x,t)$, поскольку для $u(x,t)$ все делается аналогично. Используем краткие обозначения

$$G = e^{-\beta} + Ne^{\beta^\dagger}Q, \qquad G^\dagger = e^{-\beta^\dagger} + Qe^{\beta}N, \tag{25}$$

где $\beta = 2Ax + 4iA^2t$. Из этих формул легко получаются равенства

$$Ge^{\beta}N = Ne^{\beta^\dagger}G^\dagger, \qquad G^\dagger e^{\beta^\dagger}Q = Qe^{\beta}G, \tag{26}$$

которые нам понадобятся в дальнейшем. Из (23), взяв соответствующие частные производные, имеем

$$iv_t + v_{xx} + 2vv^\dagger v = -2CG^{-1}PG^{-1}B, \tag{27}$$

где мы ввели матрицу P:

$$P \equiv -iG_t - G_{xx} + 2G_xG^{-1}G_x + 8BB^\dagger(G^\dagger)^{-1}C^\dagger C. \tag{28}$$

Из (25) следуют формулы

$$G_t = -4iA^2e^{-\beta} - 4iN(A^\dagger)^2e^{\beta^\dagger}Q, \qquad G_x = -2Ae^{-\beta} + 2NA^\dagger e^{\beta^\dagger}Q,$$

$$G_{xx} = 4A^2e^{-\beta} + 4N(A^\dagger)^2e^{\beta^\dagger}Q,$$

которые необходимо подставить в (28). С учетом равенств (21) перепишем выражение для матрицы P:

$$\begin{aligned}
P/8 \;=\; & -A^2e^{-\beta} - N(A^\dagger)^2e^{\beta^\dagger}Q + \\
& +(-Ae^{-\beta} + NA^\dagger e^{\beta^\dagger}Q)G^{-1}(-Ae^{-\beta} + NA^\dagger e^{\beta^\dagger}Q) + \\
& +(AN + NA^\dagger)(G^\dagger)^{-1}(QA + A^\dagger Q) = \\
=\; & -A^2e^{-\beta} - N(A^\dagger)^2e^{\beta^\dagger}Q + NA^\dagger(G^\dagger)^{-1}QA + NA^\dagger(G^\dagger)^{-1}A^\dagger Q + \\
& +Ae^{-\beta}G^{-1}Ae^{-\beta} - Ae^{-\beta}G^{-1}NA^\dagger e^{\beta^\dagger}Q + \\
& +NA^\dagger e^{\beta^\dagger}QG^{-1}NA^\dagger e^{\beta^\dagger}Q - NA^\dagger e^{\beta^\dagger}QG^{-1}Ae^{-\beta} + \\
& +AN(G^\dagger)^{-1}QA + AN(G^\dagger)^{-1}A^\dagger Q.
\end{aligned} \tag{29}$$

В предпоследней строке этого выражения производим замену $e^{\beta^\dagger}QG^{-1} \to (G^\dagger)^{-1}Qe^{\beta}$, а в последней строке заменяем $N(G^\dagger)^{-1} \to e^{-\beta}G^{-1}Ne^{\beta^\dagger}$, что позволено в силу равенств (26). Теперь мы имеем [с учетом (25)]

$$\begin{aligned}
P/8 \;=\; & -A^2e^{-\beta} - N(A^\dagger)^2e^{\beta^\dagger}Q + NA^\dagger(G^\dagger)^{-1}QA + NA^\dagger(G^\dagger)^{-1}A^\dagger Q + \\
& +Ae^{-\beta}G^{-1}Ae^{-\beta} - Ae^{-\beta}G^{-1}NA^\dagger e^{\beta^\dagger}Q + \\
& +NA^\dagger(G^\dagger)^{-1}[G^\dagger - e^{-\beta^\dagger}]A^\dagger e^{\beta^\dagger}Q - NA^\dagger(G^\dagger)^{-1}Qe^{\beta}Ae^{-\beta} + \\
& +Ae^{-\beta}G^{-1}[G - e^{-\beta}]A + Ae^{-\beta}G^{-1}Ne^{\beta^\dagger}A^\dagger Q.
\end{aligned} \tag{30}$$

Таким образом, мы пришли к сумме 12-ти слагаемых. Учтем теперь тот факт, что матричные экспоненты $e^{\pm\beta}$ коммутируют с A, а $e^{\pm\beta^\dagger}$ коммутируют с $A^\dagger$. Легко видеть, что имеют место попарные сокращения слагаемых с номерами: (1,10), (2,7), (3,9), (4,8), (5,11) и (6,12). Таким образом, матрица $P = 0$ и потому правая часть уравнения (27) равна нулю, что завершает доказательство.

Приведем пример для случая $n = 2$. Возьмем $A = \mathrm{Diag}[a/2, b/2]$, $B^\dagger = [1, 1]$, $C = [c_1, c_2]$, с действительными параметрами $a > 0$, $b > 0$, c_1, c_2. Тогда по формуле (22) после значительных упрощений получается следующее выражение:

$$u(x,t) = -2\frac{c_2 e^{ib^2 t}[e^{ax} + \frac{c_1^2}{a^2}(\frac{a-b}{a+b})^2 e^{-ax}] + c_1 e^{ia^2 t}[e^{bx} + \frac{c_2^2}{b^2}(\frac{a-b}{a+b})^2 e^{-bx}]}{\frac{8c_1 c_2}{(a+b)^2}\cos(a^2-b^2)t + e^{(a+b)x} + \frac{c_1^2 c_2^2}{a^2 b^2}(\frac{a-b}{a+b})^4 e^{-(a+b)x} + \frac{c_1^2}{a^2}e^{(b-a)x} + \frac{c_2^2}{b^2}e^{(a-b)x}},$$

которое описывает “связанное” состояние двух солитонов.

В частности, при выборе $c_1 = -a|(a+b)/(a-b)|$, $c_2 = b|(a+b)/(a-b)|$ получается четное по переменной x решение

$$u(x,t) = \frac{-2(a^2-b^2)[be^{ib^2 t}\cosh ax - ae^{ia^2 t}\cosh bx]}{-4ab\cos(a^2-b^2)t + (a-b)^2\cosh(a+b)x + (a+b)^2\cosh(a-b)x}.$$