Задание №10 «Ортогональные полиномы»

Задача 10.1 (*)**.** Полиномы Чебышёва I рода $T_n(x)$ являются собственными функциями оператора

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}, \quad -1 < x < 1.$$

Найти собственные значения и представление Родрига собственных функций данного оператора.

Задача 10.2 (*)**.** Полиномиальные решения вырожденного гипергеометрического уравнения

$$x\frac{d^2\psi}{dx^2} + (m+1-x)\frac{d\psi}{dx} + n\psi = 0, \quad x > 0$$

с натуральными параметрами n, $m \in \mathbb{N}$, нормированные условием $\psi(0) = \frac{(n+m)!}{n!m!}$, называются обобщёнными полиномами Лагерра $L_n^m(x)$.

- Получить явное выражение для полиномов $L_n^m(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$.
- Получить интегральное представление для $L_n^m(x)$.
- Получить рекуррентное соотношение, связывающее L_{n+1}^m, L_n^m, L_{n-1}^m.
- Упростить сумму
$$\sum_{k=0}^n L_k^m(x).$$

Задача 10.3 (*)**.** Вычислить производящие функции для полиномов Лаггера

$$G_m(t;x) = \sum_{n=0}^\infty t^n L_n^m(x), \qquad g_n(t;x) = \sum_{m=0}^\infty t^m L_n^m(x).$$

Задача 10.4 (*)**.** Плотность собственных значений случайной матрицы размера $N \times N$ из гауссова унитарного ансамбля равна

$$\rho(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \psi_n^2(x), \quad \psi_n(x) = \frac{e^{-x^2/2} H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}.$$

Используя квазиклассическое приближение (при каких x оно справедливо?),

$$\psi_N(x) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt[4]{2N+1-x^2}} \cos\left[\int_0^x \sqrt{2N+1-z^2}\,dz - \frac{\pi}{2}N\right]$$

показать, что в пределе $N \to +\infty$, функция $\rho(x)$ даёт полукруг.

Подсказка. Используйте формулу Кристоффеля–Дарбу.