

## Задание №2 «Функции Грина. Эволюционные задачи»

**Задача 2.1.** Вычислить преобразование Лапласа функции ошибок  $\mathcal{L}[\text{erf}(t)](s)$ .

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau$$

**Задача 2.2.** Решить задачу Коши

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + \nu^2 \right] x(t) = \varphi(t), \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$$

с правой частью  $\varphi(t) = e^{-\alpha t}$ ,  $\alpha > 0$ .

**Задача 2.3.** Найти запаздывающую функцию Грина оператора  $\hat{L} = \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \nu^2 \right]^2$ .

**Задача 2.4 (\*)**. Рассмотрите запаздывающую функцию Грина  $G(t < 0) = 0$ , фурье-образ которой  $G(\omega)$  есть мероморфная функция, аналитичная в  $\{\text{Im } \omega > 0\}$ . Рассмотрите интеграл

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega') d\omega'}{\omega' - \omega - i0}$$

и получите выражения, по которым можно восстановить функцию  $G(\omega)$ , если известна только её вещественная или мнимая часть.

**Задача 2.5 (\*)**. Найти запаздывающую функцию Грина  $G(x, t; \tau)$  механической системы, состоящей из шарика, скользящего по вертикальной спице, соединенного с пружинкой и полубесконечной струной, натянутой вдоль оси  $x$ .

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) &= c^2 u_{xx}(x, t), \quad x > 0 \\ u_{tt}(0, t) &= -\omega_0^2 u(0, t) + \kappa u_x(0, t) + f(t). \end{aligned}$$

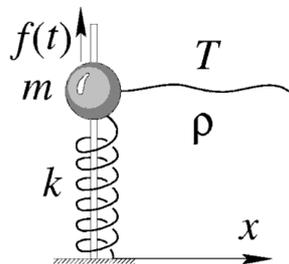


Рис. 2.1: Иллюстрация к задаче 2.5.