

### Задание №3 «Функции Грина. Граничные задачи»

Задача 3.1. Решить краевую задачу

$$\frac{d^2}{dx^2}f(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad f(-\pi) = f(\pi), \quad f'(-\pi) = f'(\pi).$$

Задача 3.2. Решить краевую задачу ( $\kappa \notin \mathbb{Z}$ )

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \kappa^2 \right] f(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad f(-\pi) = f(\pi), \quad f'(-\pi) = f'(\pi).$$

Задача 3.3 (\*). Найти функцию Грина оператора Эрмита на отрезке  $(-l, l)$  с нулевыми граничными условиями.

$$\hat{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1.$$

Задача 3.4 (\*). Найти функции Грина оператора Гельмгольца (размерность  $d = 3$ )

$$[\Delta + (k \pm i0)^2] G(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Какими физическими условиями определяется выбор функции Грина?

Задача 3.5 (\*). Вычислить асимптотику при  $t \rightarrow \infty$  решения

$$\begin{cases} \partial_t \psi(t, x) = (x^2 \partial_x^2 - x \partial_x + (n+1)) \psi(t, x), & t > 0, x > 0, \\ \psi(0, x) = x \theta(x) \theta(1-x). \end{cases}$$