## Задание №4 «Уравнение Шрёдингера и диффузии»

**Задача 4.1.** Решить задачу Шрёдингера

$$i\partial_t \Psi = -\frac{\hbar}{2m}\partial_x^2 \Psi, \quad \Psi|_{t=0} = e^{-x^2/2a^2}, \qquad x \in \mathbb{R},\, t > 0.$$

**Задача 4.2.** Решить задачу диффузии на полупрямой с отражающей стенкой при $x = 0$.

$$\partial_t \Psi = D\partial_x^2 \Psi, \quad \Psi|_{t=0} = e^{-x^2/2a^2}, \quad \partial_x \Psi|_{x=0} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}_+,\, t > 0.$$

**Задача 4.3.** В шаре радиуса $R$ в вязкой жидкости находятся $N$ броуновских частиц. Стенки шара являются для частиц поглощающими (частица, попав на них обратно в объём не возвращается). Найти асимптотический закон зависимости числа броуновских частиц от времени при $t \gg R^2/D$.

$$\partial_t p = D\Delta p, \quad p|_{t=0} = N \left/ \frac{4\pi}{3}R^3 \right., \;\; p|_{r=R} = 0.$$

---

**Задача 4.4** (*)**.** Найти запаздывающую функцию Грина стационарного уравнения Шрёдингера в размерностях $d = 1,\, 3$.

$$\left[\frac{1}{2}\Delta + \varepsilon + i0\right] G^R_\varepsilon(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$$

Показать, что стационарное уравнение Шрёдингера в произвольном потенциале $U(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2}{m}u(\mathbf{r})$ эквивалентно интегральному уравнению

$$\psi(\mathbf{r}) = \int G_\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{r}')u(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}')d\mathbf{r}'$$

Каким физическим условием определяется то, запаздывающую или опережающую функцию Грина следует использовать в интегральном уравнении?

**Задача 4.5** (*)**.** Электрон массы $m$ локализован в потенциале $U(x) = -\frac{\hbar^2\varkappa}{m}\delta(x)$. В момент времени $t = 0$ потенциал мгновенно выключается (за время $\tau \ll m/\hbar\varkappa^2$), так что состояние электрона не успевает изменится за время изменения потенциала. Вычислить как будет расплываться дисперсия волнового пакета со временем $\langle \hat{x}^2 \rangle (t)$.