Задание №5 «Метод перевала»

Задача 5.1. Найти полный асимптотический ряд функции Макдональда $K_0(z)$ при $\operatorname{Re} x \to +\infty$.

$$K_0(x) = \int_0^\infty e^{-x \operatorname{ch} t} dt.$$

Задача 5.2. Определить асимптотическое поведение интеграла при $k \to +\infty$

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kz}{\sqrt{1+z^{2n}}} dz, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

Задача 5.3. Построить полный асимптотический ряд при $\lambda \to +\infty$ для интеграла

$$I(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2+1} e^{-\lambda x^2/2} dx.$$

Задача 5.4 (*)**.** Найти первые два члена асимптотического разложения интеграла

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\lambda \cos t\right) \frac{\sin t}{t} dt, \quad \lambda \to +\infty.$$

Задача 5.5 (*)**.** Определить асимптотику полинома Лаггера $L^1_{n-1}(-z)$ при $n^{-1} \ll z \ll n^{1/3}$ и $z > 0$.

$$L^1_{n-1}(-z) = \oint_{(0)} \frac{dt}{2\pi i} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^n e^{zt}.$$

Задача 5.6 (*)**.** Описать поведение перевального интеграла при изменении параметров, приводящих к прохождению полюса подынтегральной функции через контур интегрирования.

Рассмотрите функцию определяемую интегралом

$$I(\lambda, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda x^2/2}}{x - ia} dx, \quad a > 0. \tag{5.1}$$

Постройте аналитическое продолжение на отрицательные a. И посмотрите на асимптотическое поведение $I(\lambda \to +\infty, a)$ при $a > 0$, $a < 0$ в предположении, что $|a| \gg 1/\sqrt{\lambda}$. Условно оба случая можно объединить формулой

$$I(\lambda \to +\infty, a) = 2\pi i \theta(-a) e^{\lambda a^2/2} + \frac{i}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right),$$

где на самом деле стоит некоторая регуляризация θ–функции с масштабом $1/\sqrt{\lambda}$. Вычислите интеграл (5.1) и найдите данную регуляризацию.