

**Задание №6 «Метод Лапласа. Функция Эйри»****Задача 6.1.** Вычислить значения

$$\text{Ai}(0), \text{Ai}'(0), \text{Bi}(0), \text{Bi}'(0)$$

функций Эйри первого и второго рода.

$$\text{Ai}(z) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp\left(zt - \frac{t^3}{3}\right) \frac{dt}{2\pi i}$$

$$\text{Bi}(z) = \left[ \int_{-i\infty}^{+\infty} + \int_{+\infty}^{+i\infty} \right] \exp\left(zt - \frac{t^3}{3}\right) \frac{dt}{2\pi i}.$$

Ответ выразить через  $\Gamma(\frac{1}{3})$ .**Задача 6.2.** Описать все решения уравнения

$$y''' - xy = 0.$$

Найти вещественное локализованное решение  $y_-(x)$  и нормировать его условием  $\int_{-\infty}^{+\infty} y_-(x) = 1$ .  
 Найти расходящееся при  $x \rightarrow \pm\infty$  решение  $y_+(x)$  и нормировать его значением  $y_+(0) = 1$ .

**Задача 6.3.** Показать, что функции  $\psi(z) = \text{Ai}^2(z)$  и  $\varphi(z) = \text{Bi}^2(z)$  удовлетворяют уравнению

$$\psi''' - 4z\psi' - 2\psi = 0.$$

При помощи метода Лапласа найти интегральное представление для  $\text{Ai}^2(z)$ .*Бонус:* Каким контуром даётся функция  $\text{Bi}^2(z)$ ?**Задача 6.4 (\*)**. Найти нормированные собственные функции и энергии электрона в потенциале  $U(x) = F|x|$ . Ответ выразить через нули функции Эйри  $z_n$ , нули её производной  $z'_n$  и значения функции в этих точках  $\text{Ai}(z'_n)$ ,  $\text{Ai}'(z_n)$ .**Задача 6.5 (\*)**. Доказать тождество ( $\omega = e^{\pm i2\pi/3}$ )

$$\text{Ai}(z) + \omega \text{Ai}(\omega z) + \omega^2 \text{Ai}(\omega^2 z) = 0.$$

**Задача 6.6 (\*)**. При помощи метода Лапласа найти собственные функции и собственные значения атома водорода в размерности  $d = 1$ .

$$\left[ -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{|x|} \right] \psi(x) = \varepsilon \psi(x).$$