

Задание №7 «Гамма–функция Эйлера»

Задача 7.1. Упростить выражение $|\Gamma(ix)|$, $x \in \mathbb{R}$.

Задача 7.2. Построить аналитическое продолжение интеграла

$$I(z) = \frac{1}{\Gamma(z + \frac{1}{2})} \int_0^\infty t^{z-\frac{1}{2}}(1+t)^{z-\frac{1}{2}}e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$$

и вычислить значения $I(-\frac{1}{2})$, $I(-\frac{3}{2})$.

Задача 7.3. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 dz \ln \Gamma(z).$$

Задача 7.4 (*). Вычислить интеграл

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{\operatorname{ch}^2 x} dx.$$

Замечание. Данный интеграл связан со значениями температуры перехода T_c и величины щели Δ в теории сверхпроводимости $I = \ln(\Delta/4T_c)$.

Задача 7.5 (*). Вычислить интеграл

$$I = \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz}{2\pi i} \Gamma(a+z)\Gamma(b+z)\Gamma(c-z)\Gamma(d-z).$$

Задача 7.6 (*). Построить аналитическое продолжение B -функции с помощью интеграла по контуру Почхаммера P , изображённого на рис. 7.1.

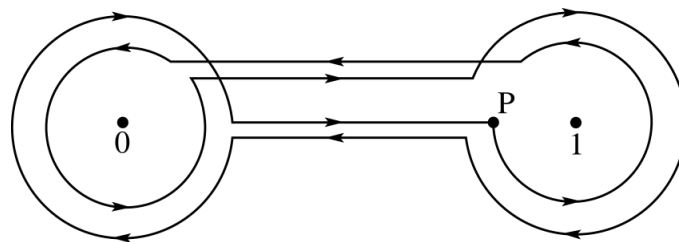


Рис. 7.1: Контур Почхаммера