

Задание №9 «Функции Эрмита»

Задача 9.1. Вычислить интеграл

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} H_n(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Задача 9.2. Найти асимптотическое поведение функций Эрмита $H_\nu(x)$, $x \rightarrow \pm\infty$, $\nu \in \mathbb{R}$.

$$H_\nu(\xi) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0)} \frac{dt}{t^{\nu+1}} e^{2\xi t - t^2}.$$

Задача 9.3 (*). Выразить через полиномы Лежандра P_n значение интеграла

$$I_n(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} H_n(xy) dx.$$

Задача 9.4 (*). Выразить через полиномы Лаггера

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x} x^n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0)} \frac{dt}{t^{n+1}} (1+t)^n e^{-xt}$$

среднее оператора $e^{\alpha \hat{x}}$ по n -ому состоянию гармонического осциллятора.

$$I_n(\alpha) = \langle n | e^{\alpha \hat{x}} | n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x} |\psi_n^{\text{osc}}(x)|^2 dx, \quad \psi_n^{\text{osc}}(x) = \frac{e^{-x^2/2} H_n(x)}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}}.$$

Задача 9.5 (*). Вычислить матрицу плотности гармонического осциллятора в координатном представлении (в качестве единицы энергии выбрана $\hbar\omega$, единицы длины — $x_0 \equiv \sqrt{\hbar/m\omega}$)

$$\rho(x', x) = \langle x' | \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z} | x \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^{\text{osc}}(x') \psi_n^{\text{osc}}(x) e^{-\beta(n+\frac{1}{2})}, \quad \psi_n^{\text{osc}}(x) = \frac{e^{-x^2/2} H_n(x)}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}}.$$

Здесь $Z = (2 \operatorname{sh} \frac{\beta}{2})^{-1}$ — статистическая сумма, обеспечивающие условие нормировки $\operatorname{tr} \hat{\rho} = 1$.

Задача 9.6 (*). Найти уровни энергии гармонического осциллятора в ящике размера W , если расстояние между центром ящика и минимумом потенциала равно y .

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2} - \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \right] \psi(x) = 0, \quad \psi(W/2 + y) = \psi(-W/2 + y) = 0.$$

- Напишите уравнение на уровни $\nu_n(y)$ используя функции Эрмита H_ν .
- Покажите, что $\nu_n(y=0) \approx n$ и найдите поправку для $y \ll 1 \ll W$.
- Покажите, что $\nu_n(y = \pm W/2) = 2n + 1$ и найдите наклон $v = \partial \nu / \partial y|_{y=\pm W/2}$ в пределе $W \gg 1$.