Тест №1 «Midterm»

7 апреля 2018 г.

Задача 1.1. Вычислить интеграл

$$I(p) = \int_0^\infty \sin\left(x^p\right) dx, \quad p > 1.$$

Задача 1.2. Найти полное асимптотическое разложение интегрального синуса

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \ \ x \to +\infty.$$

Задача 1.3. Найти асимптотику функции Макдональда $K_\nu(z)$ при $z \to +\infty$.

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu t - z \operatorname{ch} t} dt.$$

Найти первые два члена асимптотического разложения.

Задача 1.4. Построить в виде контурных интегралов все решения уравнения

$$\psi''' + x\psi'' - 2x\psi = 0.$$

Найти ограниченное при $x \to \pm\infty$ решение $\psi_0(x)$ и нормировать его условием $\psi(0) = 1$.

Задача 1.5. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Ai}(z+x)\,\mathrm{Ai}(z+y)dz.$$

Задача 1.6. Показать, что функция Грина Лапласиана $G(\mathbf{r}) = \Delta^{-1}(\mathbf{r})$ в произвольной размерности n выражается через функцию Грина оператора диффузии

$$G(t,\mathbf{r}) = (\partial_t - \Delta)^{-1}(t,\mathbf{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{4t}\right)$$

согласно формуле

$$G(\mathbf{r}) = -\int_{-\infty}^{\infty} G(t,\mathbf{r})dt.$$

Вычислить $G(\mathbf{r})$ в размерностях $n \geqslant 3$. Как продолжить ответ на $n = 2,\ 1$?

Задача 1.7. Вычислить интеграл

$$I(p) = \int_0^\infty e^{-pz} J_0(\sqrt{z})dz.$$

Задача 1.8. Найти функцию Грина уравнения Эйри на полуоси $[0, +\infty)$ с нулевым граничным условием в $x = 0$.

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - x\right] G(x,y) = \delta(x-y).$$

Для справки:

$$\mathrm{Ai}(0) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})}, \quad \mathrm{Ai}'(0) = \frac{-1}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{1}{3})}, \quad \mathrm{Bi}(0) = \frac{1}{3^{\frac{1}{6}}\Gamma(\frac{2}{3})}, \quad \mathrm{Bi}'(0) = \frac{3^{\frac{1}{6}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}.$$