Тест №1 «Midterm»

7 апреля 2018 г.

Задача 1.1. Вычислить интеграл

$$I(p) = \int_0^\infty \cos(x^p)\,dx, \quad p > 1.$$

Задача 1.2. Найти полное асимптотическое разложение дополнительной функции ошибок

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt, \;\; x \to +\infty.$$

Задача 1.3. Найти асимптотику функции Макдональда $K_\nu(z)$ при $\nu \to +\infty$.

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\nu t - z \operatorname{ch} t} dt.$$

Задача 1.4. Построить в виде контурных интегралов все решения уравнения

$$\psi''' + x\psi'' - 2x\psi = 0.$$

Найти ограниченное при $x \to \pm\infty$ решение $\psi_0(x)$ и нормировать его условием $\psi(0) = 1$.

Задача 1.5. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Ai}(z) dz.$$

Задача 1.6. Показать, что функция Грина Лапласиана $G(\mathbf{r}) = \Delta^{-1}(\mathbf{r})$ в произвольной размерности n выражается через функцию Грина оператора диффузии

$$G(t, \mathbf{r}) = (\partial_t - \Delta)^{-1}(t, \mathbf{r}) = \frac{\theta(t)}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{r}^2}{4t}\right)$$

согласно формуле

$$G(\mathbf{r}) = -\int_{-\infty}^{\infty} G(t, \mathbf{r}) dt.$$

Вычислить $G(\mathbf{r})$ в размерностях $n \geqslant 3$. Как продолжить ответ на $n = 2,\, 1$?

Задача 1.7. Вычислить интеграл

$$I(p) = \int_0^\infty z e^{-p^2 z^2} J_0(z) dz.$$

Задача 1.8. Найти функцию Грина уравнения Эйри на полуоси $[0, +\infty)$ с нулевым граничным условием в $x = 0$.

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - x\right] G(x, y) = \delta(x - y).$$

Для справки:

$$\operatorname{Ai}(0) = \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}\Gamma(\frac{2}{3})}, \quad \operatorname{Ai}'(0) = \frac{-1}{3^{\frac{1}{3}}\Gamma(\frac{1}{3})}, \quad \operatorname{Bi}(0) = \frac{1}{3^{\frac{1}{6}}\Gamma(\frac{2}{3})}, \quad \operatorname{Bi}'(0) = \frac{3^{\frac{1}{6}}}{\Gamma(\frac{1}{3})}.$$