

Задание №11 «Функции Грина. Граничные задачи»

Задача 11.1. Найти собственные вектора и значения матрицы смежности графа-цикла C_n .

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Задача 11.2. Решить краевую задачу

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad f(-\pi) = f(\pi), \quad f'(-\pi) = f'(\pi).$$

Задача 11.3. Решить краевую задачу ($\kappa \notin \mathbb{Z}$)

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \kappa^2 \right] f(x) = \operatorname{sgn}(x), \quad f(-\pi) = f(\pi), \quad f'(-\pi) = f'(\pi).$$

Задача 11.4 (*). Найти функцию Грина оператора Эрмита на отрезке $(-l, l)$ с нулевыми граничными условиями.

$$\hat{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1.$$

Задача 11.5 (*). Найти функции Грина оператора Гельмгольца (размерность $d = 3$)

$$[\Delta + (k \pm i0)^2] G(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Какими физическими условиями определяется выбор функции Грина?