

**Задание №3 «Метод перевала»****Задача 3.1.** Определить асимптотическое поведение интеграла

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2 - b/x^2} dx, \quad a, b > 0$$

при  $a \rightarrow +\infty$ . Затем вычислите интеграл точно (используйте дифференцирование по параметру).**Задача 3.2.** Определить асимптотическое поведение интеграла при  $k \rightarrow +\infty$ 

$$I(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos kz}{\sqrt{1+z^{2n}}} dz, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

**Задача 3.3.** Построить полный асимптотический ряд при  $\lambda \rightarrow +\infty$  для интеграла

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + 1} e^{-\lambda x^2/2} dx.$$

**Задача 3.4 (\*)**. Найти полный асимптотический ряд функции Макдональда  $K_0(z)$  при  $\operatorname{Re} x \rightarrow +\infty$ .

$$K_0(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \operatorname{ch} t} dt.$$

**Задача 3.5 (\*)**. Найти первые два члена асимптотического разложения интеграла

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\lambda \cos t) \frac{\sin t}{t} dt, \quad \lambda \rightarrow +\infty.$$

**Задача 3.6 (\*)**. Описать поведение перевального интеграла при изменении параметров, приводящих к прохождению полюса подынтегральной функции через контур интегрирования.

Рассмотрите функцию определяемую интегралом

$$I(\lambda, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\lambda x^2/2}}{x - ia} dx, \quad a > 0. \quad (3.1)$$

Постройте аналитическое продолжение на отрицательные  $a$ . И посмотрите на асимптотическое поведение  $I(\lambda \rightarrow +\infty, a)$  при  $a > 0$ ,  $a < 0$  в предположении, что  $|a| \gg 1/\sqrt{\lambda}$ . Условно оба случая можно объединить формулой

$$I(\lambda \rightarrow +\infty, a) = 2\pi i \theta(-a) e^{\lambda a^2/2} + \frac{i}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left( 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right),$$

где на самом деле стоит некоторая регуляризация  $\theta$ -функции с масштабом  $1/\sqrt{\lambda}$ . Вычислите интеграл (3.1) и найдите данную регуляризацию.