

Задание №4 «Метод Лапласа. Функция Эйри»**Задача 4.1.** Вычислить значения

$$\text{Ai}(0), \text{Ai}'(0), \text{Bi}(0), \text{Bi}'(0)$$

функций Эйри первого и второго рода.

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) &= \int_{-i\infty}^{+i\infty} \exp\left(zt - \frac{t^3}{3}\right) \frac{dt}{2\pi i} \\ \text{Bi}(z) &= \left[\int_{-i\infty}^{+\infty} + \int_{+\infty}^{+i\infty} \right] \exp\left(zt - \frac{t^3}{3}\right) \frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Ответ выразить через $\Gamma(\frac{1}{3})$.**Задача 4.2.** Описать все решения уравнения

$$y''' - xy = 0.$$

Найти вещественное локализованное решение $y_-(x)$ и нормировать его условием $\int_{-\infty}^{+\infty} y_-(x) = 1$.
 Найти расходящееся при $x \rightarrow \pm\infty$ решение $y_+(x)$ и нормировать его значением $y_+(0) = 1$.

Задача 4.3. Найти нормированные собственные функции и энергии электрона в потенциале $U(x) = F|x|$. Ответ выразить через нули функции Эйри z_n , нули её производной z'_n и значения функции в этих точках $\text{Ai}(z'_n), \text{Ai}'(z_n)$.

Задача 4.4 (*). Доказать тождество ($\omega = e^{\pm i2\pi/3}$)

$$\text{Ai}(z) + \omega \text{Ai}(\omega z) + \omega^2 \text{Ai}(\omega^2 z) = 0.$$

Задача 4.5 (*). Показать, что функции $\psi(z) = \text{Ai}^2(z)$ и $\varphi(z) = \text{Bi}^2(z)$ удовлетворяют уравнению

$$\psi''' - 4z\psi' - 2\psi = 0.$$

При помощи метода Лапласа найти интегральное представление для $\text{Ai}^2(z)$.*Бонус:* Каким контуром даётся функция $\text{Bi}^2(z)$?