1 Асимптотические разложения

В теоретической физике довольно редко удаётся получать точные аналитические результаты, отнюдь, основные результаты достигаются путём вычисления по теории возмущении (например, диаграммная техника) либо в рамках некоторых приближений (например, адиабатическое и квазиклассическое приближения). Почти всегда приближённому результату можно точный математический смысл при помощи асимптотического равенства.

1.1 Отношения порядка

Определение 1.1. Функции $f(x)$ и $g(x)$ *одного порядка* $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Вопрос 1.1. Верно ли, что из асимптотического равенства следует предельное равенство?

$$f(x) \sim g(x), \;\; x \to x_0 \quad \overset{?}{\Rightarrow} \quad f(x) \to g(x), \;\; x \to x_0$$

Ответ на вопрос 1.1. Нет, это неверно, проще всего пронаблюдать это на живом примере.

$$\frac{1}{x(1-x)} \sim \frac{1}{x}, \;\; x \to 0, \quad \text{однако} \quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x(1-x)} - \frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{1-x} = 1 \neq 0.$$

Также в данном контексте удобно использовать следующие определения отношений порядка.

Определение 1.2. Функция $f(x) = o(g(x))$ есть *o–малое* от $g(x)$ при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Упражнение 1.1. Доказать эквивалентность

$$f(x) \sim g(x), \;\; x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = g(x)(1 + o(1)), \;\; x \to x_0.$$

Определение 1.3. Функция $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ есть *o–большое* от $g(x)$ при $x \to x_0$, если существует такое число C, что в некоторой окрестности точки x_0 выполнено

$$|f(x)| \leqslant C|g(x)|, \quad x \in \mathcal{O}(x_0)\,.$$

Упражнение 1.2. Доказать эквивалентность

$$f(x) \sim g(x), \;\; x \to x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) = \mathcal{O}(g(x))\,, & x \to x_0 \\ g(x) = \mathcal{O}(f(x))\,, & x \to x_0 \end{cases}$$

Физики часто используют символы много меньше «$\ll$» и много больше «$\gg$» для обозначения отношения малости, эти символы можно в точности перевести как $x = o(y)$ для $x \ll y$ или $y \gg x$. Так, например, $x \ll 1$ означает $x \to 0$, а надпись $x \gg 1$ равносильна $x \to +\infty$. Такие обозначения оказываются удобны, например, когда речь идёт о размерных величинах, поэтому иногда я также буду пользоваться ими.

Свойства отношений порядка

Важно отметить, что отношения порядка можно интегрировать, но, вообще говоря, нельзя дифференцировать [1, 2].

Упражнение 1.3. Придумать пример асимптотического равенства, которое перестаёт быть верным после дифференцирования.

Если ограничится степенными асимптотиками, то можно довольно просто показать, что интегрирование асимптотических равенств имеет место.

Лемма 1.1. *Пусть функция* $f(x) \sim x^{\alpha}$ *при* $x \to 0$*, где* $\operatorname{Re}\alpha > -1$*. Тогда*

$$\int_0^x f(\xi)d\xi \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \;\; x \to 0.$$

Доказательство. Пусть $g(x) = x^{-\alpha}f(x) - 1$, $x \in \mathring{O}(0)$, тогда по условию $g(x) = o(1)$, $x \to 0$.

$$\int_0^x f(\xi)d\xi = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \int_0^x \xi^{\alpha} g(\xi)d\xi = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\left(1 + o(1)\right), \;\; x \to 0,$$

поскольку справедлива оценка

$$\left|\int_0^x \xi^{\alpha} g(\xi)d\xi\right| \leqslant \sup_{(0,x)} |g(x)| \int_0^x \xi^{\alpha} d\xi \to 0, \;\; x \to 0.$$

■

Оказывается также, что дифференцирование символов $\mathcal{O}(x^{\alpha})$ и $o(x^{\alpha})$ уместно, когда речь идёт о голоморфной функции, что впрочем не является существенным ограничением, поскольку любую гладкую функцию можно аналитически продолжить с вещественной оси в некоторую подобласть комплексной плоскости.

Лемма 1.2. *Пусть функция* $f(x) = \mathcal{O}(x^{\alpha})$ *при* $|x| \to \infty$ *в секторе* $\varphi_1 < \arg x < \varphi_2$*. Тогда*

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x) \sim \mathcal{O}\left(x^{\alpha-n}\right), \qquad \begin{array}{c} |x| \to +\infty \\ \varphi_1 < \arg x < \varphi_2 \end{array}$$

Упражнение 1.4. Доказать (либо найти и разобрать доказательство) лемму 1.2, воспользовавшись для $f^{(n)}(x)$ интегральной теоремой Коши.

1.2 Асимптотические ряды

Оказывается, что имеет смысл говорить об асимптотических рядах. Обычно на практике встречаются степенные асимптотические ряды, т. е. выражения вида

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \;\; x \to 0, \qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \;\; x \to +\infty$$

Казалось бы с точки зрения определения 1.1, это выражение бессмысленно, ведь все положительные степени $x^n = o(1)$, $x \to 1$, поэтому, например, $1 + x \sim 1 + 2x$ при $x \to 0$. Придать смысл асимптотическим разложениям в ряд можно следующим образом.

Определение 1.4. Функция $f(x)$ имеет *асимптотический ряд* $\sum g_n(x)$, если для каждой частичной суммы ряда $N \in \mathbb{N}$ остаток $R_N(x)$ есть o–малое от последнего члена суммы.

$$R_N(x) = f(x) - \sum_{n=0}^{N} g_n(x) = o(g_N(x)), \quad x \to 0.$$

Самым простым примером асимптотического ряда является ряд Тейлора, но класс асимптотических разложений шире уже хотя бы потому, что асимптотическому ряду необязательно быть сходящимся.

Вопрос 1.2. Существует ли такая функция, которая имеет асимптотический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\ln^n)(x) = \ln x + \ln(\ln(x)) + \ldots, \quad x \to +\infty$$

где n–ое слагаемое состоит из n вложенных логарифмов?

Ответ на вопрос 1.2. Существует. Пусть, например, функция $N_{\ln}(x)$ равна такому натуральному числу, что $(\ln^n)(x) > 0$, но $(\ln^{n+1})(x) \leqslant 0$ для каждого $x > 1$. Тогда следующая функция является искомым примером.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N_{\ln}(x)} (\ln^n)(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (\ln^n)(x), \quad x \to +\infty$$

Таким образом, для любого функционального ряда состоящего из строго убывающих в асимптотическом смысле функций $g_{n+1}(x) = o(g_n(x))$, $x \to +\infty$ можно найти функцию, которая будет иметь заданное асимптотическое разложение. Однако, такая функция обязательно не единственная, покуда существуют функции, которые не имеют разложений по указанному параметру малости. Так, например следующие две функции имеют одинаковые асимптотические ряды (которые по совместительству являются рядами Тейлора)

$$\cos x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \to 0,$$
$$\cos x + e^{-1/x^2} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \to 0.$$

В этой связи про экспоненциально малые поправки на фоне степенных говорят как про непертурбативные, оказывается, что в определённых случаях их учёт существенно важен.

Приведу несколько свойств степенных асимптотических рядов, т. е. для выражений вида

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \to 0, \qquad f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^n}, \quad x \to +\infty,$$

для которых выполнено

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^n = \mathcal{O}\left(x^N\right), \quad x \to 0, \qquad f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{c_n}{x^n} = \mathcal{O}\left(x^{-N}\right), \quad x \to +\infty,$$

1^o Для любого набора чисел $\{a_n\}$ найдётся бесконечно много функций, обладающих степенным асимптотических рядом с данными коэффициентами.
2^o Любая функция $f(x)$ имеет одно единственное разложение в степенной асимптотический ряд, либо не имеет вовсе.
3^o Степенные асимптотические разложения можно интегрировать, но, вообще говоря, нельзя дифференцировать.

Читателю предлагается самостоятельно придумать аргументы в пользу указанных утверждений.

1.3 Функция Стилтьеса

Разберу конкретный пример обращения с асимптотическими рядами. Функция Стилтьеса (в узком смысле) определяется как интеграл

$$S(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}dt}{1+xt}, \quad \operatorname{Re} x > 0.$$

Попробую построить разложение этой функции при $x \to +0$.

$$S(x) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty e^{-t}(-xt)^n dt \sim \sum_{n=0}^\infty n!(-x)^n, \quad x \to 0.$$

Получившийся ряд расходится, поэтому нет надежды сохранить знак равенства в последнем переходе, однако, я предположил, что здесь уместен знак асимптотического разложения в ряд — проверю свою догадку.

$$\frac{1}{1+xt} = \sum_{n=0}^{N-1}(-xt)^n + \frac{(-xt)^N}{1+xt} \qquad \Rightarrow \qquad S(x) = \sum_{n=0}^{N-1} n!(-x)^n + \int_0^\infty \frac{e^{-t}(-xt)^N}{1+xt}dt$$

$$|R_N(x)| = \left|\int_0^\infty \frac{e^{-t}(-xt)^N}{1+xt}dt\right| \leqslant \int_0^\infty e^{-t}|xt|^N dt = N!|x|^N$$

Упражнение 1.5. Показать, что

$$R_N(x) \sim \frac{N!(-x)^N}{1+xN}, \quad N \to +\infty.$$

Итак, для каждой частичной суммы ошибка оказывается мала по сравнению с самой суммой при $x \to +0$. Однако при любом x ряд расходится, поэтому естественно спросить, сколько членов ряда необходимо удержать чтобы получить хорошее приближение исследуемой функции?

Посмотрю на ошибку $R_N(x)$ как функцию N при фиксированном x. Её поведение оказывается немонотонным. При $N \lesssim \left[\frac{1}{x}\right]$ ошибка уменьшается с ростом N, имеет минимум при $N_{\text{opt}}(x) \sim \left[\frac{1}{x}\right]$, а затем возрастает, ряд расходится (см. рис. 1.1a). Понятно, что лучшее приближение даётся рядом с переменным числом членов.

$$S_{\text{opt}}(x) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{1}{x}\right]-1} n!(-x)^n$$

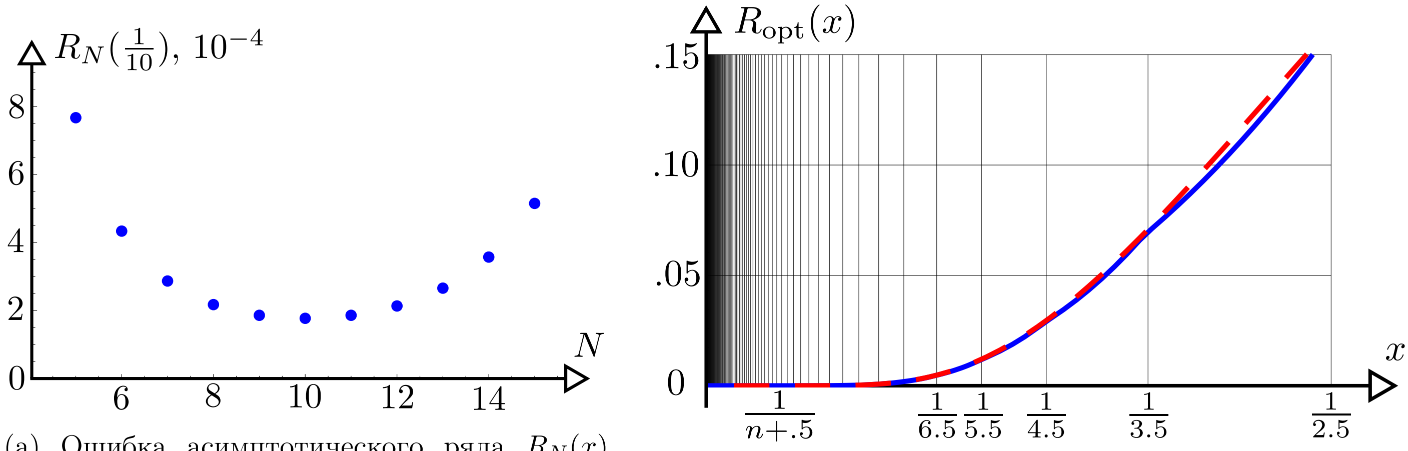
Такой оптимально просуммированный асимптотический ряд называется *суперасимптотикой*. Отличие суперасимптотики от точной функции экспоненциально мало (см. рис. 1.1b).

$$R_{\text{opt}}(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \exp\left(-\frac{1}{x}\right), \quad x \to 0. \tag{1.1}$$

Аналлитические свойства функции Стилтьеса Можно ли было сразу понять, что функция $S(x)$ имеет только асимптотическое разложение при $x = 0$? Замечу, данная функция не является аналитичной в нуле. Действительно,

$$S(xe^{i\pi}) - S(xe^{-i\pi}) = 2\pi i \operatorname*{res}_{t=\frac{1}{x}} \frac{e^{-t}}{x} = \frac{2\pi i}{x} \exp\left(-\frac{1}{x}\right).$$

Следовательно, функция Стилтьеса имеет точку ветвления при $x = 0$, значит предполагаемый ряд Лорана имеет нулевой радиус сходимости.



(a) Ошибка асимптотического ряда $R_N(x)$ при $x = .1$ как функция N.

(b) Ошибка суперасимптотического ряда $R_{\rm opt}(x)$ в сравнении с асимптотическим выражением (1.1).

Рис. 1.1: Ошибка асимптотического ряда для функции Стилтьеса.

Для сравнения рассмотрю более простой пример.

$$S_1(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+xt} = \frac{1}{x}\ln(1+x). \tag{1.2}$$

В данном случае разложение подынтегральной функции в ряд по x и почленное интегрирование приводят к правильному результату

$$S_1(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-xt)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n+1} = \frac{1}{x}\ln(1+x),$$

при условии, что ряд сходится, т. е. $|x| < 1$. Отличие от примера с функцией $S(x)$ заключается в том, что область сходимости подынтегральной функции лежит внутри отрезка интегрирования при $|x| < 1$. После суммирования ряда при $|x| < 1$, функцию можно аналитически продолжить в область $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 1)$ и восстановить точный ответ (1.2).

Универсальное проведение Функция Стилтьеса является наглядной демонстрацией эвристических методов [4] нахождения асимптотических разложений интегралов, зависящих от параметра. В дальнейшем, я чаще всего не буду доказывать, что разложение подынтегральной функции и почленное дифференцирование действительно приводят к асимптотическим разложениям, а буду принимать это на веру.

1.4 Оценка интегралов с несколькими масштабами

Иногда оказывается, что прямолинейное разложение в ряд Тейлора подынтегрального выражения оказывается недостаточно для получения асимптотического разложения с необходимой точностью. Обычно, такая ситуация возникает, когда хочется вытащить константу под логарифмом. Объясню проблему на конкретном примере.

При решении задачи 9 из [5, §3] возникает потребность вычислить интеграл

$$J(y) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 x + y^2}\, dx$$

при $y \to 0$. Очевидно, что $J(0) = 1$. Меня же интересует зависимость интеграла о параметра – нужен следующий член разложения. Хочется разложить корень по малому параметру y^2, эквивалентно продифференцировать интеграл по y и положить $y^2 = 0$.

$$\left.\frac{\partial}{\partial y^2}\right|_{y=0} J(y) = \left.\int_0^{\pi/2} \frac{dx/2}{\sqrt{\sin^2 x + y^2}}\right|_{y=0}$$

Получившийся интеграл расходится на нижнем пределе, это, конечно, связано с тем, подынтегральная функция допускает разложение лишь при $y < |\sin x|$.

Неправильное решение Кажется естественным разбить интеграл на два слагаемых

$$J_1(y) = \int_0^{y'} \sqrt{\sin^2 x + y^2}\, dx, \qquad J_2(y) = \int_{y'}^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 x + y^2}\, dx,$$

где $y' = \arcsin y = y + \mathcal{O}\big(y^3\big)$, $y \to 0$. Дальше можно в каждом из интегралов разложить корень по меньшему из слагаемых. Оказывается, что эта тактика неправильная — разложения $J_1(y)$ состоит из слагаемых одного порядка, поэтому пришлось бы просуммировать весь ряд, чтобы получить правильный ответ. Это просто увидеть в интеграле $J_1(y)$.

$$J_1(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_0^{y'} y \left(\frac{\sin x}{y}\right)^{2k} dx \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_0^{y'} y \left(\frac{x}{y}\right)^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} c'_k y^2$$

Данная оценка подсказывает нам как справиться с этой проблемой — достаточно заменить $\sin x \mapsto x$ в интеграле $J_1(y)$ и его можно будет вычислить.

$$J_1(y) = \int_0^{y'} \sqrt{x^2 + y^2} dx + o\big(y^2\big) = \frac{y'}{2}\sqrt{y'^2 + y^2} + \frac{y^2}{2} \ln\left[\frac{y' + \sqrt{y'^2 + y^2}}{y}\right] + o\big(y^2\big) =$$
$$= \frac{y^2}{\sqrt{2}} + \frac{y^2}{2} \ln\left[1 + \sqrt{2}\right] + o\big(y^2\big).$$

Вычисления с интегралом $J_2(y)$ представляются более трудными.

$$J_2(y) = \int_{y'}^{\pi/2} \sin x dx + \frac{y^2}{2} \int_{y'}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x} - \frac{y^4}{8} \int_{y'}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x} + \ldots$$
$$= \sqrt{1 - y'^2} - \frac{y^2}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{y'}{2} - \frac{y^4}{64} \left(\sin^{-2} \frac{y'^2}{2} + 4 \ln \operatorname{ctg} \frac{y'}{2} - \cos^{-2} \frac{y'^2}{2}\right) + \ldots$$

Видно, что из третьего члена разложения, который притворялся $\mathcal{O}\big(y^4\big)$ вылез член порядка $\mathcal{O}\big(y^2\big)$. Такие же члены вылезают во всех порядка с нижнего предела интегрирования. Если не заметить этого, то можно совершить ошибку, посчитав, что

$$J(y) = 1 - \frac{y^2}{2} \ln y + \frac{y^2}{2} \left(\sqrt{2} - 1 + \ln 2 \left(1 + \sqrt{2}\right)\right) + o\big(y^2\big).$$

Ясно, что член $y^2 \ln y$ найден правильно, а вот число перед y^2 неверное. В таком случае говорят, что интеграл найден с логарифмической точностью и обычно на этом успокаиваются.

Правильное решение Успешным методом является выбор такой промежуточной точки z, для которой выполнено $1 \gg z \gg y$. Понятно, что её всегда можно найти при $y \to 0$, например, положив $z = \sqrt{y}$.

$$J_{\rm I}(y) = \int_0^z \sqrt{\sin^2 x + y^2}\, dx, \qquad J_{\rm II}(y) = \int_z^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 x + y^2}\, dx,$$

В первом интеграле достаточно заменить $\sin x \sim x$, как и раньше имею

$$J_{\rm I}(y) = \int_0^z \sqrt{x^2+y^2} dx + o\big(z^2\big) = \frac{z}{2}\sqrt{z^2+y^2} + \frac{y^2}{2}\ln\left[\frac{z+\sqrt{z^2+y^2}}{y}\right] + o\big(z^2\big) =$$
$$= \frac{z^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \mathcal{O}\left(\frac{y^4}{z^2}\right) + \frac{y^2}{2}\left[\ln\frac{2z}{y} + \mathcal{O}\left(\frac{y^2}{z^2}\right)\right] + o\big(z^2\big)\,.$$

Когда второй интеграл может быть оценён как

$$J_{\rm II}(y) = \sqrt{1-z^2} - \frac{y^2}{2}\ln\operatorname{tg}\frac{z}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{y^4}{z^2}\right) + \mathcal{O}\big(y^4\ln y\big)$$
$$= 1 - \frac{z^2}{2} + \mathcal{O}\big(z^4\big) - \frac{y^2}{2}\ln\frac{z}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{y^4}{z^2}\right) + \mathcal{O}\big(y^4\ln y\big)$$

Итого, правильный ответ суть

$$J(y) = 1 - \frac{y^2}{2}\ln y + \left(\frac{1}{4} + \ln 2\right) y^2 + o\big(y^2\big)\,.$$