1.4 Уравнение диффузии

В качестве примера использованию метода функции Грина для уравнения в частных производных, рассмотрю задачу диффузии. Случайные блуждания, распространение частицы в вязкой среде, распространение тепла в средах или движение электрона в металле с примесями может быть описано с помощью уравнения диффузии.

$$\partial_t\psi = D\Delta\psi.$$

Пусть известно распределение плотности в начальный момент времени $\psi|_{t=0} = \psi^{(0)}(\mathbf{r})$. Найду закон эволюции $\psi(t,\mathbf{r})$. Рассмотрю задачу в пространстве произвольной размерности d. Фурье–преобразование ψ по координате $\mathbf{r}$ приводит к уравнению

$$\partial_t\psi_{\mathbf{k}} = -Dk^2\psi_{\mathbf{k}}, \quad \psi_{\mathbf{k}}|_{t=0} = \psi^{(0)}_{\mathbf{k}}.$$

которое имеет простое решение

$$\psi_{\mathbf{k}} = \psi^{(0)}_{\mathbf{k}} e^{-Dk^2t}, \quad \psi(t,\mathbf{r}) = \int \psi^{(0)}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-Dk^2t}\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} = \int \psi^{(0)}(\mathbf{r}')G(t,\mathbf{r}-\mathbf{r}')d^d\mathbf{r}'.$$

где Функция Грина задачи диффузии

$$G(t,\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}-Dk^2t}\frac{d^d\mathbf{k}}{(2\pi)^d} = \frac{\exp\left[-\frac{r^2}{4Dt}\right]}{(4\pi Dt)^{d/2}}.$$

Задача сведена к вычислению свёртки с произвольным начальным условием.

Упражнение 1.8. Решить задачу диффузии на полупрямой с отражающей стенкой при $x = 0$.

$$\partial_t\Psi = D\partial_x^2\Psi, \quad \Psi|_{t=0} = e^{-x^2/2a^2}, \quad \partial_x\Psi|_{x=0} = 0, \qquad x\in\mathbb{R}_+,\ t>0.$$

Диффузия в квадрате В случае когда не имеется трансляционной инвариантности по координате, можно получить решение в виде ряда по собственным функциям. Пусть, например, частица живёт в квадрате $[0,L_x]\times[0,L_y]$ с поглощающими стенками. Тогда функцию плотности можно разложить по базису

$$\psi(t,\mathbf{r}) = \sum_{n_x,n_y=1}^{\infty}\frac{2\psi_{n_xn_y}(t)}{\sqrt{L_xL_y}}\sin\frac{\pi n_x x}{L_x}\sin\frac{\pi n_y y}{L_y}.$$

Для фурье–компонент уравнение записывается как

$$\partial_t\psi_{n_xn_y} = -D\pi^2\left(\frac{n_x^2}{L_x^2}+\frac{n_y^2}{L_y^2}\right)\psi_{n_xn_y}$$

а начальные условия

$$\psi|_{t=0} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) \qquad \Rightarrow \qquad \psi_{n_xn_y}|_{t=0} = \frac{2}{\sqrt{L_xL_y}}\sin\frac{\pi n_x x_0}{L_x}\sin\frac{\pi n_y y_0}{L_y}.$$

В итоге, решение собирается в ряд

$$\psi(t,x) = \frac{4}{L_xL_y}\sum_{n_x,n_y=1}^{\infty}\exp\left[-D\pi^2\left(\frac{n_x^2}{L_x^2}+\frac{n_y^2}{L_y^2}\right)t\right]\sin\frac{\pi n_x x_0}{L_x}\sin\frac{\pi n_y y_0}{L_y}\sin\frac{\pi n_x x}{L_x}\sin\frac{\pi n_y y}{L_y}.$$

Можно видеть, что асимптотика при $t \gg D/L^2$ определяется членом $n_x = n_y = 1$.