# 1 Гамма–функция Эйлера

Для значений аргумента $\operatorname{Re} z > 0$ функция $\Gamma(z)$ аналитическая в области $\mathbb{C}\backslash\mathbb{N}_0^-$ может быть задана с помощью интегрального представления Эйлера.

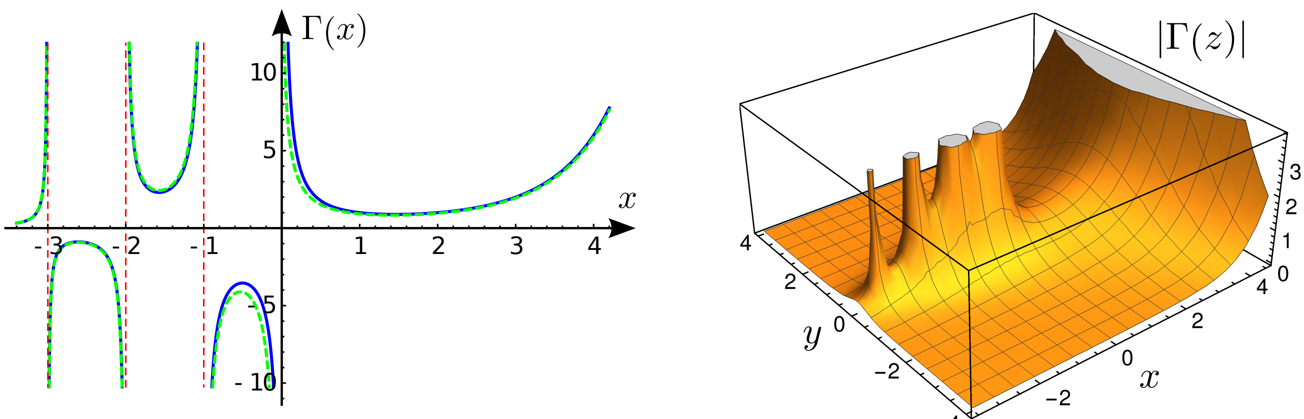
$$\Gamma(z) \eqqcolon \int_0^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t}, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Построить аналитическое продолжение гамма-функции на отрицательные аргументы проще всего используя факториальное свойство (здесь $n \in \mathbb{N}$)

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \dots = \frac{\Gamma(z+n)}{z\cdot(z+1)\dots(z+n-1)}, \quad \operatorname{Re} z > -n.$$

Можно заметить что $\Gamma$–функция претендует на полюса в неположительных целых числах $z \in \backslash\mathbb{N}_0^-$. Действительно, из следующего представления видно, что $\Gamma(z)$ — мероморфная функция.

$$\Gamma(z) = \int_1^\infty dt\, t^{z-1} e^{-t} + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{n+z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{N}_0^-. \qquad \operatorname*{res}_{z=-n} \Gamma(z) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$




(a) График $\Gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}$ в сравнении с функцией Стирлинга (зелёный пунктир)

(b) График $|\Gamma(z)|$, $z \in \mathbb{C}$.

Рис. 1.1: График Гамма–функции.

**Зеркальное тождество** Следующее тождество (также известное как формула дополнения) может тоже быть использовано для аналитического продолжения гамма–функции.

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \iint\limits_0^\infty dt d\tau\, t^{z-1}\tau^{-z} e^{-t-\tau} = \Bigg/ \begin{matrix} \xi = t/\tau \\ \tau = \tau \end{matrix} \quad \frac{\partial(\xi,\tau)}{\partial(t,\tau)} = \frac{1}{\tau} \Bigg/ = \int\limits_0^\infty d\xi \int\limits_0^\infty d\tau\, \xi^{z-1} e^{-(1+\xi)\tau} =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{d\xi\, \xi^{z-1}}{1+\xi} = \frac{1}{1-e^{i2\pi z}} \oint\limits_{+\infty}^{(0)} \frac{d\xi\, \xi^{z-1}}{1+\xi} = -2\pi i \frac{e^{i\pi z}}{1-e^{i2\pi z}} = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \qquad 0 < \operatorname{Re} z < 1.$$

Контур интегрирования по $\xi$ указан на Рис. 1.2b. Поскольку с правой стороны равенства стоит функция аналитическая в области $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$, то и тождество можно распространить на любые $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.

**Упражнение 1.1.** Найти $|\Gamma(\frac{1}{2}+ix)|^2$, $x \in \mathbb{R}$.

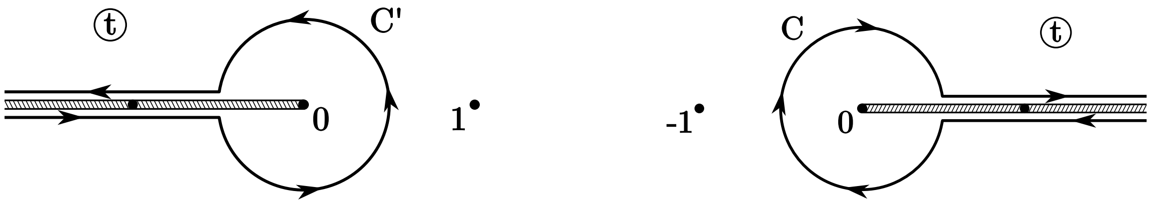
**Представление Ганкеля** Самым практичным представлением $\Gamma(z)$, валидным при всех значениях аргумента, является представление Ганкеля в виде контурного интеграла.

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1-e^{i2\pi z}} \oint_{+\infty}^{(0)} dt\, t^{z-1} e^{-t} = \frac{\pi}{\sin \pi z} \oint_{-\infty}^{(0)} \frac{dt}{2\pi i}\, t^{z-1} e^{t}.$$

Комбинируя представление Ганкеля с формулой дополнения, найду ещё одно представление.

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \oint_{-\infty}^{(0)} \frac{dt}{2\pi i}\, t^{-z} e^{t}, \quad z \in \mathbb{C}$$

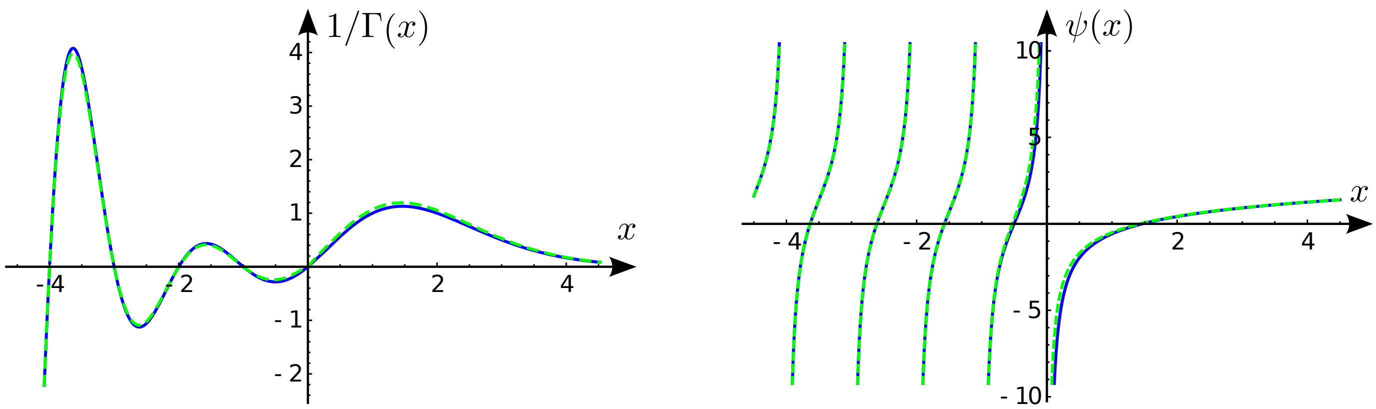
Из данного представления видно, что $1/\Gamma(z)$ — целая функция.




(a) Контур анти-Ганкеля $C'$. (b) Контур Ганкеля $C$.

Рис. 1.2: Контуры интегрирования Ганкеля $C$ анти-Ганкеля $C'$.

**Упражнение 1.2.** Определить асимптотическое поведение $1/\Gamma(z)$ при $z \to -\infty$.




(a) График $1/\Gamma(x)$ в сравнении с асимптотикой. (b) График $\psi(x)$ в сравнении с асимптотикой.

Рис. 1.3: Графики обратной $\Gamma$–функции и $\psi$–функции.

**Теорема умножения Гаусса** Аналогом формулы $(2n)! = 2^n n!(2n-1)!!$ является тождество

$$2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2z).$$

Его обобщение на произведения более старшего порядка даётся теоремой умножения Гаусса.

$$n^{nz-\frac{1}{2}}\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\Gamma\left(nz\right).$$

Она может быть доказана при помощи только формулы Стирлинга и факториального свойства. Рассмотрю

$$f(z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(z+1/n)\ldots\Gamma(z+(n-1)/n)}{\Gamma(nz)}$$

Многократно используя $\Gamma(z)=\Gamma(z+1)/z$ представлю $\Gamma$–функцию в виде

$$\Gamma\left(z+\frac{k}{n}\right)=\Gamma\left(z+\frac{k}{n}+m+1\right)\prod_{l=0}^{m}\frac{1}{z+k/n+l},$$

$$\Gamma(nz)=\Gamma(nz+n(m+1))\prod_{l=0}^{n(m+1)-1}\frac{1}{nz+l}.$$

Подстановка данных выражений в $f(z)$ приводит к

$$f(z)=\frac{n^{n(m+1)}}{\Gamma(nz+n(m+1))}\prod_{l=0}^{n-1}\Gamma\left(z+\frac{l}{n}+m+1\right)$$

Указанное равенство справедливо для произвольного $m$, а значит верно и предельное равенство при $m\to\infty$. Пользуясь формулой Стирлинга, нахожу

$$f(z)\to\frac{e^{nz+nm+n-1}}{\sqrt{2\pi}(nz+nm+n-1)^{nz+nm+n-1/2}}\prod_{l=0}^{n-1}\sqrt{2\pi}\frac{(z+k/n+m)^{z+l/n+m+1/2}}{e^{z+l/n+m}}=$$

$$=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nz}e^{\frac{n-1}{2}}\prod_{l=0}^{n-1}\left(1+\frac{(n-1-l)/n}{m+z+l/n}\right)^{-(m+z+l/n+1/2)}\to$$

$$\to(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nz}\exp\left(\frac{n-1}{2}-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n-1-l}{n}\right)=(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-nz}.$$

## 1.1 Бета-функция Эйлера

Удобно ввести следующую B–функцию.

$$\mathrm{B}(p,q)\risingdotseq\int_0^1 dt\,t^{p-1}(1-t)^{q-1}=\int_0^\infty\frac{dt\,t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}},\qquad \mathrm{Re}\,p,\mathrm{Re}\,q>0.$$

Данные интегралы выражаются через $\Gamma$–функцию.

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\iint\limits_0^\infty dtd\tau\,t^{p-1}\tau^{q-1}e^{-t-\tau}=\Bigg/\begin{array}{c}\xi=t/\tau\\ \eta=t+\tau\end{array}\ \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(t,\tau)}=\frac{(1+\xi)^2}{\eta}\Bigg/=$$

$$=\int\limits_0^\infty d\eta\,\eta^{p+q-1}e^{-\eta}\int\limits_0^\infty d\xi\,\frac{\xi^{p-1}}{(1+\xi)^{p+q}}=\mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q),\qquad \mathrm{Re}\,p,\mathrm{Re}\,q>0.$$

**Упражнение 1.3.** Выразите интеграл $I(a,b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\,\cos^a\varphi\sin^b\varphi$ через B–функцию.

## 1.2 Дигамма функция

Удобно также рассмотреть логарифмическую производную $\Gamma$–функции.

$$\psi(z)\risingdotseq\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=\sum_{n=m}^{z-1}\frac{1}{n}+\psi(m).$$

Число $\gamma\equiv-\psi(1)=-\Gamma'(1)\approx .577$ является мировой константой (постоянная Эйлера-Маскерони).

**Пример 1.1.** Найду несколько первых членов асимптотического разложения

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad n \to +\infty.$$

Из факториального свойства Γ–функции следует, что $S_n = \psi(n+1) - \psi(1)$. Из формулы Стирлинга следует асимптотическое равенство

$$\psi(n+1) \sim \ln n - \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \to +\infty.$$

Следовательно $S_n \sim \ln n + \gamma + \mathcal{o}(1)$, $n \to +\infty$.