1.2 Эволюционные задачи

Разберу базовые аспекты обращения с функцией Грина на простейшем примере гармонического осциллятора. Пусть осциллятор трясут с заданной силой $f(t)$, тогда его движение описывается задачей Коши

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad x(t_0) = x_0, \;\; \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0. \tag{1.5}$$

Сначала отвлекусь от наличия начальных условий и найду некоторое частное решение уравнения. Его можно представить в виде свёртки с функцией Грина.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\tau) f(\tau) d\tau, \quad \left[\frac{d^2}{dt^2} + \omega_0^2\right] G(t) = \delta(t)$$

Где я воспользовался однородностью уравнения по времени $G(t,\tau) = G(t-\tau)$. Решение находится с помощью перехода в собственный базис дифференциального оператора – базис плоских волн.

$$G_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G(t) e^{i\omega t} dt, \qquad G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\omega e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}.$$

Фурье–образ функции Грина удовлетворяет уравнению

$$(-\omega^2 + \omega_0^2) G_\omega = 1 \quad \Rightarrow \quad G_\omega = \mathcal{P}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} + c_1 \delta(\omega - \omega_0) + c_2 \delta(\omega + \omega_0).$$

Решение алгебраического уравнения в Фурье–пространстве также как и решение исходного дифференциального уравнения представляет сумму частного и общего решения.

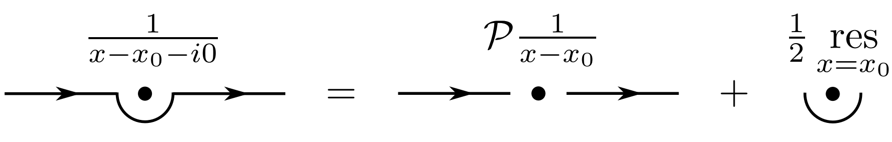
Замечание. В качестве частного решения чаще всего выбирают дробь в смысле главного значения, определённую через своё действие на функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}\frac{1}{x} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx.$$

Удобно также пользоваться решениями с бесконечно малыми мнимыми добавками в знаменателе, которые связаны друг с другом через формулу Сохоцкого.

$$\frac{1}{x - x_0 \pm i0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x - x_0}{(x-x_0)^2 + \varepsilon^2} \mp \frac{i\varepsilon}{(x-x_0)^2 + \varepsilon^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x - x_0} \mp i\pi\delta(x - x_0).$$

Данное равенство следует воспринимать в смысле вычисления интегралов вместе указанными выражениями. Читай: интеграл с полюсом, смещённым в верхнюю полуплоскость рвен сумме интеграла в смысле главного значения и полувычета.



Константы $c_{1,2}$ принято выбирать таким образом, чтобы $G^R(t, \tau < t) = 0$. Данное решение называется *запаздывающей* функцией Грина. Такое требование происходит из физического условия причинности — система $x(t)$ не может знать о возмущении $f(\tau)$ в моменты времени $\tau > t$.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} G^R(t,\tau) f(\tau) d\tau.$$

Чтобы получить выражение для запаздывающей функции Грина достаточно пустить контур интегрирования в обратном преобразовании Фурье *выше* всех полюсов G_ω. Действительно, согласно лемме Жордана следующий интеграл при $t<0$ равен сумме вычетов в полюсах, лежащих выше контура интегрирования, следовательно он обращается в ноль при $t<0$.

$$G^R(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}}{(\omega_0-i0-\omega)(\omega_0+i0+\omega)}\frac{d\omega}{2\pi}.$$

Таким образом, запаздывающей функции Грина отвечает выбор констант $c_{1,2}=\pm i\pi/2\omega_0$.

Вычисления по теореме Коши о вычетах приводят к результату

$$G^R(t)=\theta(t)\left[\frac{e^{i\omega_0 t}}{2\omega_0 i}-\frac{e^{-i\omega_0 t}}{2\omega_0 i}\right]=\theta(t)\frac{\sin\omega_0 t}{\omega_0},$$

который находится в согласии с общим видом запаздывающей функции Грина дифференциального полинома.

Лемма 1.1. *Дифференциальный полином степени n с единичным коэффициентом при старшей производной имеет запаздывающую функцию Грина $G^R(t)=\theta(t)x_{cl}(t)$, где $x_{cl}(t)$ — решение классической задачи Коши с начальными условиями*

$$x(0)=0,\ x'(0)=0,\ \ldots,\ x^{(n-1)}(0)=1.$$

Итак, решение уравнения гармонического осциллятора с произвольной правой частью суть

$$x(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{\sin\left[\omega_0(t-\tau)\right]}{\omega_0}f(\tau)d\tau.$$

Несложно видеть, что оно отвечает нулевым условиям при $t\to-\infty$. Такое решение удобно использовать, когда речь идёт об адиабатическом включении силы $f(\tau)$. Теперь вернусь к решению начальной задачи (1.5).

Задача Коши

Чтобы учесть начальные условия (1.5), замечу, что покуда меня интересует лишь решение $x(t>t_0)$, я могу выключить взаимодействие для $t<t_0$, т. е. заменить $f(\tau)\mapsto\theta(\tau)f(\tau)$. Действительно, формальная проверка, показывает, что функция

$$x_0(t)=\int_{t_0}^{t}G^R(t,\tau)f(\tau)d\tau \qquad\Rightarrow\qquad \hat{L}x(t)=\theta(t-t_0)f(t)$$

решает исходное уравнение при $t>t_0$. Данное решение удобно тем, что оно имеет нулевые производные в указанной точке $x_0(t_0)=0$, $\dot{x}_0(t_0)=0$. Поэтому для решения исходной начальной задачи осталось только добавить решение классической задачи Коши.

$$x(t)=x_0\cos\left[\omega_0(t-t_0)\right]+\dot{x}_0\frac{\sin\left[\omega_0(t-t_0)\right]}{\omega_0}+\int_{t_0}^{t}\frac{\sin\left[\omega_0(t-\tau)\right]}{\omega_0}f(\tau)d\tau.$$

Однородное решение в данном случае можно выразить через функцию Грина согласно

$$x(t)=x_0\dot{G}^R(t-t_0)+\dot{x}_0G^R(t-t_0)+\int_{t_0}^{t}G^R(t-\tau)f(\tau)d\tau,\ \ t>t_0. \tag{1.6}$$

Обобщение (1.6) на дифференциальное уравнения произвольного порядка можно получить процедурой указанной в следующем упражнении. Однако, проще учесть начальные условия с помощью метода преобразования Лапласа.

Упражнение 1.2. Показать, что решение начальной задачи можно найти как свёртку запаздывающей функции Грина с модифицированной правой частью.

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+2\gamma\frac{d}{dt}+\omega_0^2\right]x(t)=\theta(t)f(t)+(\dot{x}_0+2\gamma x_0)\,\delta(t)+x_0\delta'(t). \tag{1.7}$$

Для этого покажите, что указанному уравнению удовлетворяет функция $\theta(t)x_{\rm cl}(t)$, где $x_{\rm cl}(t)$ — решение классической задачи Коши.

Преобразование Лапласа

Рассмотрю метод обращения дифференциальных операторов, аналогичный методы Фурье, которым удобно пользоваться для учёта начальных условий. Разберу метод Лапласа на конкретном примере гармонического осциллятора с затуханием.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad x(0) = x_0, \;\; \dot{x}(0) = \dot{x}_0. \tag{1.8}$$

Ясно, что в силу однородности задачи, начальный момент можно без ограничения общности выбрать в качестве $t = 0$. Преобразование Лапласа определяется как интеграл

$$\mathcal{L}[x(t)](p) \equiv x_p = \int_0^\infty x(t)e^{-pt}dt.$$

Лаплас–образ совпадает с Фурье–образом $\mathcal{L}[x(t)](p) = \mathcal{F}[\theta(t)x(t)](ip)$ функции $\theta(t)x(t)$ на мнимой частоте $\omega = ip$. Поэтому, естественно, что обратное преобразование Лапласа даётся интегралом

$$\mathcal{L}^{-1}[x_p](t) = \int_{-i\infty+\sigma}^{i\infty+\sigma} x_p e^{pt}\frac{dp}{2\pi i}. \tag{1.9}$$

При этом, чтобы удовлетворить $\mathcal{L}^{-1}[x_p](t<0) = 0$ необходимо провести контур интегрирования *правее* всех особенностей функции x_p, в согласии с тем как запаздывающая функция Грина выражается с помощью контурного интеграла, проходящего выше всех особенностей. Действительно, в таком случае при $t < 0$, контур интегрирования в (1.9) можно унести вправо на $p = +\infty$. Чтобы проверить справедливость обратного преобразования «в лоб» достаточно убедиться, что контур в интегральном представлении δ–функции также может быть деформирован произвольным образом.

$$\int_{-i\infty+\sigma}^{i\infty+\sigma} e^{p(t-\tau)}\frac{dp}{2\pi i} = \delta(t-\tau).$$

Возможно, чтобы убедить себя в этом следует регуляризовать интеграл добавкой $e^{pt} \mapsto e^{pt+\varepsilon t^2}$.

Упражнение 1.3. Вычислить преобразование Лапласа функции ошибок $\mathcal{L}[\mathrm{erf}(t)](s)$.

$$\mathrm{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\tau^2}d\tau.$$

Вычисление Лаплас–образа уравнения (1.8) приводит к уравнению (сравни с (1.7))

$$(p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2)x_p = f_p + \dot{x}_0 + px_0 + 2\gamma x_0.$$

Значит решение исходной задачи записывается в виде интеграла (пусть $\gamma > 0$)

$$x(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{f_p + \dot{x}_0 + px_0 + 2\gamma x_0}{p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2}e^{pt}\frac{dp}{2\pi i} = (\dot{x}_0 + 2\gamma x_0)G^R(t) + x_0\dot{G}^R(t) + \int_0^t G^R(t-\tau)f(\tau)d\tau.$$

Здесь $G^R(t)$ — запаздывающая функция Грина

$$G^R(t) = \int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{e^{pt}}{p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2}\frac{dp}{2\pi i} = \theta(t)e^{-\gamma t}\begin{cases}\frac{1}{\omega_1}\sin\omega_1 t, & \omega_0 > \gamma, \qquad \omega_1 \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\\ t, & \omega_0 = \gamma,\\ \frac{1}{\lambda}\operatorname{sh}\lambda t, & \omega_0 < \gamma. \qquad \lambda \equiv \sqrt{\gamma^2 - \nu^2}\end{cases}$$

Упражнение 1.4. Доказать, что Лаплас–прообраз произведения равен «укороченной свёртке» Лаплас–прообразов.

$$\mathcal{L}^{-1}[x_p y_p](t) = \int_0^t x(t-\tau)y(\tau)d\tau.$$