2 Ортогональные полиномы

Задав весовую функцию $\rho(x)$, $a < x < b$, такую что

$$\rho(x) > 0, \;\; x \in (a,b), \qquad \forall n \in \mathbb{N} \;\;\; \exists \int_a^b \rho(x) x^n dx.$$

можно построить систему ортогональных в смысле указанной метрики полиномов. Например, можно положить $P_0 \equiv 1$, и нумеровать полиномы их степенью. Тогда, скажем, первый полином определится (с точностью до общего множителя) из условия

$$(P_1, P_0) = \int_a^b P_1(x)\rho(x)P_0(x)dx = 0, \qquad P_1(x) \propto x + a_0.$$

Второй полином найдётся из условия ортогональности P_0 и P_1, и так далее.

Эквивалентно, можно взять некоторый базис в пространстве полиномов, например, набор мономов $P_n^{(0)}(x) = x^n$, и ортогонализовать его с помощью алгоритма Грама–Шмидта.

Полученный набор полиномов, очевидно, удобен тем, что он представляет из себя ортонормированный базис в пространстве функций на интервале (a,b) с матрицей Грама $\rho(x)$.

2.1 Общие свойства ортогональных полиномов

Реккурентное соотношение Три последовательных полинома всегда можно связать рекуррентным соотношением

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x). \tag{2.1}$$

Действительно, $P_{n+1}(x) - (A_n x + B_n)P_n(x)$ является многочленом степени $n-1$, который ортогонален всем многочленам степени не выше $n-2$. Очевидно, $P_{n+1}(x)$ и $P_n(x)$ ортогональны всем полиномам степени не выше $n-1$, но $xP_n(x)$ ортогонален только полиномам степени не выше $n-2$. Также отмечу, что реккурентное выражение справедливо и при $n=0$, если исключить из него P_{-1}.

Подстановка явного разложения многочленов и приравниванием коэффициентов при равных степенях x^n, позволяет выразить числа A_n, B_n, C_n.

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^N c_n^{(k)} x^k \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} c_{n+1}^{(n+1)} = A_n c_n^{(n)}, \\ c_{n+1}^{(n)} = A_n c_n^{(n-1)} + B_n c_n^{(n)}. \end{cases}$$

Чтобы выразить C_n, умножу скалярно уравнение (2.1) на P_{n-1}. Поскольку $(xP_n, P_{n-1}) = (P_n, c_{n-1}^{(n-1)} x^n) = (c_{n-1}^{(n-1)}/c_n^{(n)})(P_n, P_n)$, справедливо

$$C_n = \frac{c_{n-1}^{(n-1)}}{c_n^{(n)}} \frac{(P_n, P_n)}{(P_{n-1}, P_{n-1})} = \frac{A_n}{A_{n-1}} \frac{||P_n||^2}{||P_{n-1}||^2}.$$

Именно выражения в таком виде будут удобны для доказательства следующего тождества.

Формула Кристоффеля–Дарбу Используя рекуррентное соотношение, преобразую сумму

$$(x-y)\sum_{m=0}^n \frac{P_m(x)P_m(y)}{||P_m||^2} = \sum_{m=0}^n \left(x + \frac{B_m}{A_m}\right)\frac{P_m(x)P_m(y)}{||P_m||^2} - \langle x \leftrightarrow y \rangle =$$

$$= \sum_{m=0}^n \frac{\left[P_{m+1}(x) + C_m P_{m-1}(x)\right] P_m(y)}{A_m ||P_m||^2} - \langle x \leftrightarrow y \rangle = \sum_{m=0}^n \frac{P_{m+1}(x)P_m(y)}{A_m||P_m||^2} + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{P_m(x)P_{m+1}(y)}{A_m||P_m||^2} - \langle x \leftrightarrow y \rangle =$$

$$= \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{A_n||P_n||^2}.$$

Данное тождество часто встречается в приложениях.

2.2 Теория Родрига

Ортогональные полиномы естественным образом возникают в прикладных задачах как собственные функции самосопряжённых операторов, именно в этом контексте я и буду их рассматривать ниже. Рассмотрю дифференциальный оператор вида

$$\sigma(x)\frac{d^2\psi}{dx^2}+\tau(x)\frac{d\psi}{dx}+\lambda\psi=0,\quad a<x<b, \tag{2.2}$$

где $\sigma(x)$, $\tau(x)$ – многочлены, причём их степени $\deg\sigma\leqslant 2$, $\deg\tau\leqslant 1$, а также $\sigma>0$ на (a,b). Здесь a, $b\in\overline{\mathbb{R}}$. Введение функции плотности

$$\rho(x)=\frac{1}{\sigma(x)}\exp\int\frac{\tau(x)}{\sigma(x)}dx$$

позволяет переписать уравнение (2.2) в форме Штурма-Лиувилля.

$$\frac{d}{dx}\left[\sigma(x)\rho(x)\frac{d\psi}{dx}\right]+\lambda\rho(x)\psi=0,\quad a<x<b. \tag{2.3}$$

При этом для самосопряжённости оператора необходимо $\sigma(a)\rho(a)=\sigma(b)\rho(x)$. Из данного свойства немедленно вытекает ортогональность. Интегрируя уравнения (2.3) с различными собственными значениями $\lambda_n\neq\lambda_m$,

$$\begin{aligned}(\lambda_n-\lambda_m)\int_a^b\psi_n\rho(x)\psi_m(x)dx&=\int_a^b\psi_n(x)\left[\sigma(x)\rho(x)\psi_m'(x)\right]'dx-\int_a^b\psi_m(x)\left[\sigma(x)\rho(x)\psi_n'(x)\right]'dx\\&=\sigma(x)\rho(x)W[\psi_n,\psi_m](x)\big|_a^b=0,\end{aligned}$$

нахожу, что функции ψ_n и ψ_m ортогональны с весовой функцией $\rho(x)$.

Формула Родрига Докажу теперь что при $\lambda=-n\tau'-\frac{1}{2}n(n-1)\sigma''$ уравнение (2.2) решает полином степени n

$$\psi_n(x)\propto\frac{1}{\rho(x)}\frac{d^n}{dx^n}\left[\sigma^n(x)\rho(x)\right].$$

Продифференцирую уравнение (2.2) n раз. Получаю уравнение на $\psi^{(n)}\equiv\frac{d^n\psi}{dx^n}$.

$$\sigma(x)\frac{d^2\psi^{(n)}}{dx^2}+\left(\tau(x)+n\sigma'(x)\right)\frac{d\psi^{(n)}}{dx}+\left(\lambda+n\tau'(x)+\frac{n}{2}(n-1)\sigma''(x)\right)\psi^{(n)}=0.$$

Это уравнение такого же вида как (2.2) с коэффициентами $\sigma^{(n)}(x)=\sigma(x)$, $\tau^{(n)}(x)=\tau(x)+n\sigma'(x)$, $\lambda^{(n)}=\lambda+n\tau'+\frac{1}{2}n(n-1)\sigma''$ и соответственно $\rho^{(n)}(x)=\sigma^n(x)\rho(x)$. Значит уравнение на $\psi^{(n)}$ эквивалентно

$$\left(\lambda_n-\lambda\right)\sigma^n(x)\rho(x)\psi^{(n)}=\frac{d}{dx}\left[\sigma^{n+1}(x)\rho(x)\psi^{(n+1)}\right], \tag{2.4}$$

где я обозначил $\lambda_n\equiv\lambda-\lambda^{(n)}=-n\tau'-\frac{1}{2}n(n-1)\sigma''$. Пусть теперь ψ – полином степени n. Тогда $\psi^{(n+1)}\equiv 0$, $\psi^{(n)}\equiv\mathrm{const}\neq 0$. Тогда для выполнения (2.4) необходимо и достаточно $\lambda=\lambda_n$. Чтобы удовлетрорить уравнение на $\psi^{(n-1)}$, нужно положить

$$\psi^{(n-1)}(x)\eqqcolon\frac{\psi^{(n)}}{\left(\lambda_{n-1}-\lambda\right)\sigma^{n-1}(x)\rho(x)}\frac{d}{dx}\left[\sigma^n(x)\rho(x)\right].$$

Затем определю

$$\psi^{(n-2)}(x)\eqqcolon\frac{1}{\left(\lambda_{n-2}-\lambda\right)\left(\lambda_{n-1}-\lambda\right)}\cdot\frac{\psi^{(n)}}{\sigma^{n-2}(x)\rho(x)}\frac{d^2}{dx^2}\left[\sigma^n(x)\rho(x)\right]$$

и так далее. Продолжая цепочку, восстанавливаю ψ удовлетворяющую (2.2).

$$\psi(x)=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\cdot\frac{\psi^{(n)}}{\rho(x)}\frac{d}{dx}\left[\sigma^n(x)\rho(x)\right].$$

Пример 2.1. Полиномы Эрмита.

- Дифференциальное уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}\right] H_n(x) = -2nH_n(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

- Формула Родрига

$$H_n(x) = (-)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = \frac{n!}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t^{n+1}}e^{2xt-t^2}.$$

- Рекуррентное соотношение

$$2xH_n(x) = H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x).$$

- Формула Кристоффеля–Дарбу

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{H_m(x)H_m(y)}{2^m\, m!} = \frac{H_{n+1}(x)H_n(y) - H_n(x)H_{n+1}(y)}{2^{n+1}n!(x-y)}.$$

Пример 2.2. Полиномы Лежандра

- Дифференциальное уравнение

$$\left[(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx}\right] P_n(x) = -n(n+1)P_n(x), \qquad -1 < x < 1.$$

- Формула Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

- Рекуррентное соотношение

$$(2n+1)xP_n(x) = (n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x).$$

- Формула Кристоффеля–Дарбу

$$\sum_{m=0}^{n}(2m+1)P_m(x)P_m(y) = (n+1)\frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}.$$