2 Метод перевала

2.1 Вещественный случай

Метод перевала для вещественных интегралов (a.k.a метод Лапласа) позволяет получить асимптотические разложения интегралов вида

$$I(\lambda) = \int e^{f(x;\lambda)} g(x) dx, \tag{2.1}$$

при $\lambda \to +\infty$, если функция $f(x)$ имеет параметрически резкий максимум на отрезке интегрирования, а $g(x)$ меняется сравнительно медленно.[1] Для простоты буду считать, что $f(x;\lambda) = \lambda f(x)$.

В пределе $\lambda \to +\infty$ значение подынтегральной функции вблизи максимума $|x - x_0| < 1/\sqrt{\lambda}$ экспоненциально превалирует над остальным контуром интегрирования.

$$\left| I(\lambda) - \int_{O(x_0)} g(x) e^{\lambda f(x)} dx \right| \ll e^{\lambda f(x_0)}, \quad \lambda \to +\infty.$$

Внутри маленького интервала $(x_0 - 1/\sqrt{\lambda}, x_0 + 1/\sqrt{\lambda})$ подынтегральные функции могут быть приближены своими разложениями в ряд Тейлора, а пределы интегрирования могут быть распространены до бесконечных с точностью до экспоненциально малых поправок, что приводит к

$$I(\lambda) \approx \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda f(x_0) - \frac{1}{2}\lambda |f''(x_0)| x^2} \left(1 + \lambda \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} x^3 + \dots \right) (g(x_0) + g'(x_0) x + \dots)\, dx$$

Гауссовы интегралы легко вычисляются. В результате получается асимптотическое равенство.

$$I(\lambda \to +\infty) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda |f''(x_0)|}} e^{\lambda f(x_0)} g(x_0) \left(1 + \frac{f^{(3)}(x_0) g'(x_0)}{2 g(x_0) \lambda} + \frac{f^{(4)}(x_0)}{8\lambda} + \frac{g''(x_0)/g(x_0)}{2|f''(x_0)|\lambda} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^{\frac{3}{2}}}\right)\right). \tag{2.2}$$

В случае когда максимум функции $f(x)$ достигается на конце отрезка, аналогично, выполнено

$$\begin{aligned} \int^{a} e^{\lambda f(x)} g(x) dx &\approx e^{\lambda f(a)} \int^{0} e^{\lambda f'(a) x} \left(1 + \frac{f''(a)}{2} x + \dots \right) (g(a) + g'(a) x + \dots)\, dx \\ &= e^{\lambda f(a)} \left[\frac{g(a)}{f'(a)} \frac{1}{\lambda} + \frac{g(a) f''(a) - g'(a) f'(a)}{(f'(a))^3} \frac{1}{\lambda^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^3}\right) \right], \quad \lambda \to +\infty. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь я предположил, что $f'(a) \neq 0$. Если же $f'(a) = 0$, но $f''(a) \neq 0$, то краевой вклад выражается гауссовым интегралом (об интерполяции между двумя пределами смотри ниже)

Упражнение 2.1. Доказать формулу $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} x^{2n} dx = (2n-1)!!\sqrt{2\pi}$.

Пример 2.1. Рассмотрю следующий интеграл в пределе $\lambda \to +\infty$.

$$\mathcal{I}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2/2 - x^4/4} dx.$$

Он в точности имеет вид (2.1), согласно общей схеме

$$\mathcal{I}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k x^{4k}}{(2\lambda)^{2k} k!} \frac{dx}{\sqrt{\lambda}} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-)^k (4k-1)!!}{(2\lambda)^{2k} k!}, \quad \lambda \to +\infty.$$

В данном случае интервал интегрирования совпадает с областью сходимости ряда Тейлора подынтегральной функции, и всё же получившийся ряд для $\mathcal{I}(\lambda)$ имеет нулевой радиус сходимости — это асимптотический ряд.

[1] Формальное обоснование метода перевала может быть найдено в книге [7], здесь я привожу изложение на физическом уровне строгости.

Пример 2.2. Рассмотрю тот же интеграл, что и в предыдущем примере при $\lambda = -\mu \to -\infty$. Формально он примет вид (2.1) только после замены $x \mapsto \sqrt{\mu}x$, однако удобнее производить разложения, не совершая перемасштабирование.

$$\mathcal{I}(-\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mu x^2/2 - x^4/4} dx.$$

В этом случае экспонента имеет максимумы при $x = \pm\sqrt{\mu}$. При $\mu \to +\infty$,

$$\mathcal{I}(-\mu) \sim \sum_{\pm} e^{\frac{\mu^2}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu x^2} \left(1 \pm \sqrt{\mu}x^3 - \frac{x^4}{4} + \dots\right) dx = 2\sqrt{\frac{\pi}{\mu}} e^{\frac{\mu^2}{4}} \left(1 + \frac{3}{4\mu^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu^4}\right)\right).$$

Важно отметить, что для получения члена разложения порядка μ^{-2} понадобились первый член разложения $e^{-x^4/4}$ и второй член $e^{\mp\sqrt{\mu}x}$, поскольку они дают вклад одного порядка по μ.

Упражнение 2.2. Найти лидирующий член асимптотики

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx, \quad n \to +\infty.$$

Феномен Стокса Предположу, что исследуемый интеграл

$$\int_a e^{\lambda f(x)} dx$$

набирается на нижнем пределе $x = a$ и зависит от параметра, при некоторых значениях которого, $f'(a) = 0$ обращается в ноль. Тогда при нахождении асимптотики $\lambda \to +\infty$ имеется несколько сценариев. При $f'(a)/f''(a) \gg 1/\sqrt{\lambda}$ главным является линейный член разложения и асимптотика определяется формулой (2.3), когда $f'(a)/f''(a) \ll 1/\sqrt{\lambda}$ можно пренебречь первой производной и заработать (полу)гауссов интеграл. Если же $f'(a) > 0$ и максимум $f(x)$ полностью помещается внутри интервала интегрирования имеется обычный перевальный вклад (2.2).

В термодинамическим пределом $\lambda \to \infty$ рассмотренные сценарий в точности отвечают случаям $f'(a) < 0$, $f'(a) = 0$, $f'(a) > 0$. Получается, что асимптотическое поведение функции меняется скачком при конечном шевелении параметров. Данное поведение асимптотических разложений носит название *феномен Стокса*. В действительности, при любом конечном λ указанное изменение происходит плавно на масштабе $1/\sqrt{\lambda}$ и может быть описано функцией ошибок. Пусть $\alpha = f'(a)/f''(a)$, тогда исследуемый интеграл приводится к виду

$$\int_\alpha^{+\infty} e^{-\lambda x^2/2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\alpha\right)\right] \underset{\lambda \gg 1}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \begin{cases} \frac{-1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \frac{e^{-\lambda\alpha^2/2}}{\lambda\alpha}, & \alpha\sqrt{\lambda} \to +\infty, \\ \alpha - \lambda\alpha^3/6, & |\alpha| \ll 1/\sqrt{\lambda}, \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} + \frac{e^{-\lambda\alpha^2/2}}{\lambda\alpha}, & \alpha\sqrt{\lambda} \to -\infty. \end{cases}$$

Упражнение 2.3. Аналитически продолжить гауссов интеграл как функцию параметра z с вещественной положительной полуоси на все $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-zx^2/2} dx, \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

2.2 Метод перевала

Рассмотрю вопрос об асимптотическом поведении экспоненциальных интегралов с точки зрения теории функций комплексного переменного. Модельным является интеграл вида

$$I(\lambda) = \int_C e^{\lambda f(z)} g(z) dz, \quad \lambda \to +\infty. \tag{2.4}$$

Для краткости ниже положу $g \equiv 1$, поскольку главную роль играет экспонента.

Рассуждения Попытаюсь свести задачу к уже рассмотренному вещественному случаю.

$$\operatorname{Re} I(\lambda) = \int_C e^{\lambda \operatorname{Re} f(z)} \left[\cos\left(\lambda \operatorname{Im} f(z)\right) dx - \sin\left(\lambda \operatorname{Im} f(z)\right) dy\right].$$

Пусть $\operatorname{Re} f(z)$ имеет максимум в точке $z_0 \in C$, тогда, казалось бы, интеграл должен набираться вблизи z_0, но это неверно при наличии быстрых осцилляций $\cos\left(\lambda \operatorname{Im} f(z)\right)$. Если $\operatorname{Im} f'(z_0) \neq 0$, то в области влияния точки экстремума $|z - z_0| \sim 1/\sqrt{\lambda}$ синус совершает порядка $\sqrt{\lambda} \gg 1$ колебаний, которые эффективно усредняют вклад от точки максимума в ноль.

Оказывается, что указанную проблему можно обойти, использую теорию функции комплексного переменного. Мне понадобятся следующие утверждения:

1. Значение интеграла (2.4) не изменяется при деформациях контура C, оставляющих граничные точки неподвижными и проходящих через особенности подынтегральной функции .

2. Линии наибыстрейшего изменения $\operatorname{Re} f(z)$ регулярной функции $f(z)$ являются линиями постоянства $\operatorname{Im} f(z)$ и наоборот[2]. Другими словами, градиенты $\nabla \operatorname{Re} f(x,y) \perp \nabla \operatorname{Im} f(x,y)$.

Допустим, что я смог деформировать контур таким образом, что $e^{f(z)}$ имеет постоянную фазу, т. е. такой на котором $\operatorname{Im} f(z) = \mathrm{const}$. Тогда я свёл задачу к вещественному случаю. Осталось найти на этом контуре точку максимума $\operatorname{Re} f(z)$. Оказывается, она совпадает с экстремумом $f(z)$. Действительно, постоянство фазы и условие экстремальности $\operatorname{Re} f$ вдоль контура означают $\nabla \operatorname{Im} f(z) \perp \boldsymbol{\tau}$, $\nabla \operatorname{Re} f(z) \perp \boldsymbol{\tau}$, где $\boldsymbol{\tau}$ — касательная к контуру. Следовательно, $|\nabla \operatorname{Re} f| = 0$ или $|\nabla \operatorname{Im} f| = 0$, что в силу условий Коши–Римана эквивалентно друг друг другу и требованию $f'(z_0) = 0$.

Теперь ясно как найти правильный контур — достаточно потребовать, чтобы он проходил через экстремальные точки $f'(z) = 0$ в направлении наискорейшего спада.

В окрестности экстремальной точки функцию можно приблизить разложением

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}(z - z_0)^2. \qquad \begin{aligned} \operatorname{Re} \Delta f &= \left|\tfrac{f''(z_0)}{2}\right| |\Delta z^2| \cos\left(2\varphi + \alpha\right), \\ \operatorname{Im} \Delta f &= \left|\tfrac{f''(z_0)}{2}\right| |\Delta z^2| \sin\left(2\varphi + \alpha\right), \end{aligned}$$

где $\varphi = \arg z$, $\alpha = \arg f''(z_0)$. Видно, что направление $2\varphi + \alpha = 0, \pi$ отвечающее наискорейшему изменению $\operatorname{Re} f$ является линией постоянства $\operatorname{Im} f$. Значит для функций $\operatorname{Re} f$ и для $\operatorname{Im} f$ экстремальная точка $f(z)$ является седловой, а искомый контур отвечает перевальному маршруту через хребет наискорейшего роста $\operatorname{Re} f$.

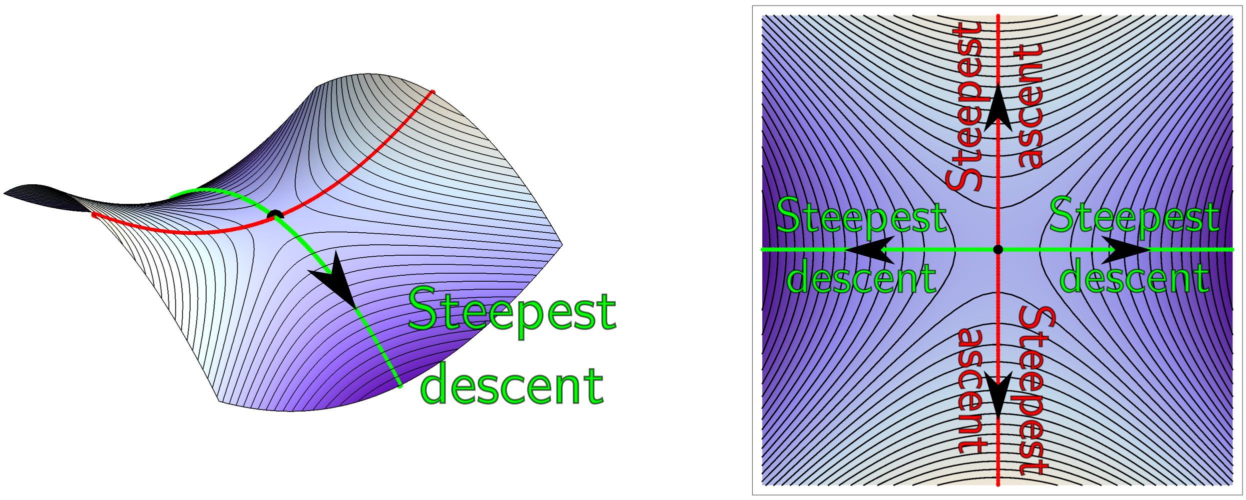


Рис. 2.1: Карта Стокса функции $f = -z^2$ в комплексной плоскости переменной z. Тон фона отображает значение $\operatorname{Re}(-z^2)$, а чёрные кривые — линии постоянного уровня.

[2]Это легко видеть при помощи условий Коши–Римана $\partial_x \operatorname{Re} f = \partial_y \operatorname{Im} f$, $\partial_x \operatorname{Im} f = -\partial_y \operatorname{Re} f$

Алгоритм метода перевала Распишу по пунктам алгоритм применения метода перевала на примере уже знакомой функции $\mathcal{I}(\lambda)$ при $|\lambda| \to \infty$ и произвольном $\arg\lambda$.

$$\mathcal{I}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{f(z)} dx, \quad f(z) = -\lambda \frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}, \tag{2.5}$$

1. Найти все перевальные точки из условия $f'(z_0) = 0$ и значения экспоненты в них $f(z_0)$.
   $\mapsto$ В данном случае это $z_0 = 0$ и $z_\pm = \pm i\sqrt{\lambda}$. Седловые высоты $f(z_0) = 0$, $f(z_\pm) = \lambda^2/4$.

2. В окрестности каждой перевальной точки нарисовать линии наискорейшего спуска, определяемые условием $f''(z_0)\Delta z^2 < 0$.
   $\mapsto$ $f''(z_0) = -\lambda \quad \Rightarrow \quad \varphi_0 = -\frac{1}{2}\arg\lambda$ или $\varphi_0 = \pi - \frac{1}{2}\arg\lambda$.
   $\mapsto$ $f''(z_\pm) = 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \varphi_\pm = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arg\lambda$ или $\varphi_\pm = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arg\lambda$

3. Деформировать контур так, чтобы он состоял из линий постоянной фазы. Учесть вычеты.
   $\mapsto$ Верная деформация контура зависит от $\arg\lambda$ (см. рис. 2.2).

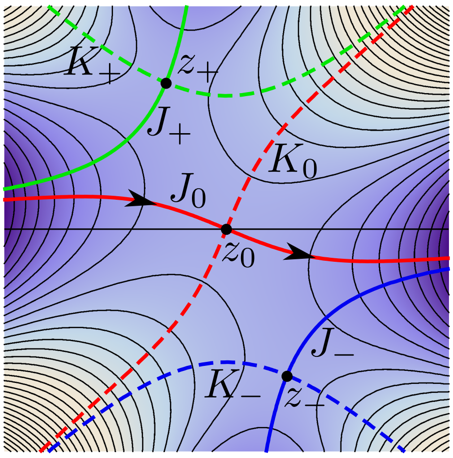
4. Просуммировать вклады краевых точек и причастных перевальных точек.

$$I \sim \frac{e^{f(b)}}{f'(b)} - \frac{e^{f(a)}}{f'(a)} + \sum_i \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(z_i)|}} e^{i\varphi_i} e^{f(z_i)}.$$

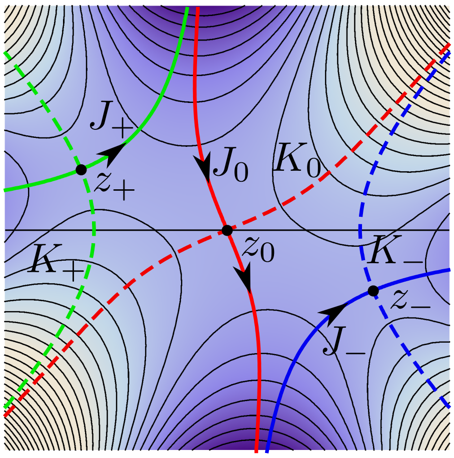
$\mapsto$ Вклады концевых точек отсутствует. При $|\arg\lambda| < \frac{\pi}{2}$ подходящие линии наискорейшего спуска захватывают только перевал $z = 0$. При $\frac{\pi}{2} < |\arg\lambda| \leqslant \pi$ контур проходит через все три перевала по линиям J_+, J_0, J_-. При $|\arg\lambda| = \frac{3\pi}{4}$ вклад z_0 и сёдел $z_\pm$ сравниваются по величине, а при $\frac{3\pi}{4} < |\arg\lambda| \leqslant \pi$ вклады $z_\pm$ доминируют. В итоге, при $|\lambda| \to +\infty$

$$\mathcal{I}(\lambda) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k-1)!!}{(2i\lambda)^{2k} k!}, \qquad |\arg\lambda| < \frac{\pi}{2},$$

$$\mathcal{I}(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}} \sum_{k=0}^{k_{\text{opt}}} \frac{(4k-1)!!}{(2i\lambda)^{2k} k!} + 2\sqrt{\frac{\pi}{-\lambda}} e^{\frac{\lambda^2}{4}}, \qquad \frac{\pi}{2} < |\arg\lambda| \leqslant \pi.$$



(a) $\arg\lambda = \frac{\pi}{4}$, $n_0 = 1$, $n_\pm = 0$



(b) $\arg\lambda = \frac{3\pi}{4}$, $n_{0,\pm} = 1$

Рис. 2.2: Карта Стокса для экспоненты (2.5). Линии наискорейшего спуска J_0, $J_\pm$ нарисовано сплошным, наискорейшего подъема K_0, $K_\pm$ — пунктиром.

Налицо ещё одно проявление феномена Стокса: в асимптотике $\mathcal{I}(\lambda)$ «появляется» новая экспонента при прохождении $\arg\lambda$ через $\pm\frac{\pi}{2}$. В точности при $|\arg\lambda| = \frac{\pi}{2}$ линия наискорейшего спуска J_0 совпадает с $K_\pm$, что приводит к тому, что вклады от перевалов $z_\pm$ приобретают коэффициент $\frac{1}{2}$.

2.2.1 Уравнения Пикарда–Лефшетца

Красота метода перевала заключается в исследовании «топологической» структуры линий постоянства фазы и поиске правильного контура, что не всегда бывает просто. Однако, существует метод автоматизации процедуры поиска контура. Рассмотрю интеграл

$$I(\lambda) = \int_a^b e^{i\lambda S(z)} dz, \qquad \lambda \to +\infty, \tag{2.6}$$

и нарисую из каждой точки исходного контура линии $z(t)$ наискорейшего спуска $\operatorname{Im} S(z)$. Это буду линии постоянства $\operatorname{Re} S(z) = \operatorname{Re} S(z_0)$, или, точнее, решения локального уравнения

$$\dot z = \pm i \cdot \overline{S'(z)}, \qquad z(0) = z_0, \tag{2.7}$$

где «+» отвечает линии спуска, а знак «−» — линии подъёма. Действительно, для регулярной функции $\partial_{\bar z} S = 0$ решения (2.7) удовлетворяют $\frac{d}{dt} \operatorname{Re} S(z(t)) = 0$.

Обозначу через D — множество решений $z(t)$, начинающихся на исходном контуре $z_0 \in [a, b]$. Огибающая ∂D всех таких линий наискорейшего спуска также состоит из линий постоянной фазы. Естественно, что решения $z(t)$, стартующие из краевых точек a, b принадлежат искомому контуру, когда остальные части границы множества ∂D показывают правильный путь, соединяющий правые и левые концы $z(t; a)$, $z(t; b)$. Причём данные линий автоматически проходят через седловые точки и другие сингулярности в точности по линиям постоянства фазы, значит ∂D и является искомой деформацией контура.

Пример 2.3. Рассмотрю интеграл (2.6) с действием $S(z) = z + \frac{z^3}{3}$ и концами $a = -1$, $b = 1$. Его асимптотическое поведение при $\lambda \to +\infty$ определяется концевыми вкладами. Однако, также имеется экспоненциально малый вклад от седловой точки $z = i$, что приводит к

$$I(\lambda) = \left[\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^3} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^5}\right)\right] \sin\frac{4\lambda}{3} - \left[\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{5}{8\lambda^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda^6}\right)\right] \cos\frac{4\lambda}{3} + \frac{2\pi}{\lambda^{1/3}} \operatorname{Ai}\left(\lambda^{2/3}\right), \quad \lambda \to +\infty.$$

Чтобы найти верную деформацию контура решу уравнения Пикарда–Лефшеца

$$(\dot x, \dot y) = \nabla \operatorname{Im}\left(z^3/3 + z\right).$$

Семейство решений представлено на рис. 2.3. Граница ∂D в точности даёт искомый контур.

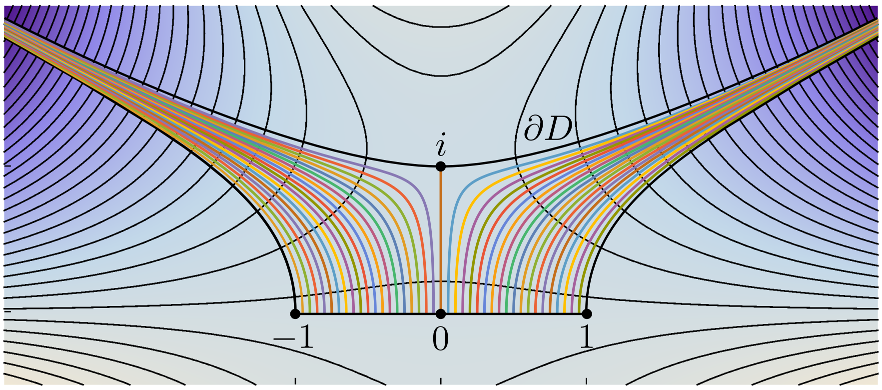


Рис. 2.3: Решения уравнений Пикарда–Лефшеца для действия $S(z) = z + \frac{z^3}{3}$, стартующие из отрезка $[-1, 1]$. Черными линиями указана огибающая ∂D. Тон фона показывает значение $\operatorname{Re} iS(z)$, изогипсы указывают на то, что $z = i$ — седловая точка.

Пример 2.4. Для функции $\mathcal{I}(\lambda)$ уравнения Пикарда–Лефшетца примут вид

$$\begin{aligned} J_\sigma: &\quad \dot z + \overline{f'(z)} = 0, \quad z(-\infty) = z_\sigma, \\ K_\sigma: &\quad \dot z - \overline{f'(z)} = 0, \quad z(-\infty) = z_\sigma, \end{aligned} \qquad f(z) = -\lambda\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}.$$

Их решения проходящие через сёдла указаны на рис. 2.2. Видно, что седло является релевантным тогда и только тогда, когда соответствующая линия K пересекает исходный контур $(-\infty, \infty)$.