МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДОПОЛНЕНИЯ

§ а. Полиномы Эрмита

Уравнение

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0 \qquad (a,1)$$

относится к типу уравнений, которые могут быть решены с помощью *метода Лапласа*[1]).

Этот метод применим вообще к линейным уравнениям вида

$$\sum_{m=0}^{n} (a_m + b_m x) \frac{d^m y}{dx^m} = 0,$$

коэффициенты которого не выше первой степени по x, и заключается в следующем. Составляем полиномы

$$P(t) = \sum_{m=0}^{n} a_m t^m, \qquad Q(t) = \sum_{m=0}^{n} b_m t^m$$

и с их помощью функцию

$$Z(t) = \frac{1}{Q} \exp \int \frac{P}{Q}\, dt,$$

определенную с точностью до постоянного множителя. Тогда решение рассматриваемого уравнения может быть выражено в виде комплексного интеграла

$$y = \int_C Z(t)\, e^{xt}\, dt,$$

где путь интегрирования C выбран так, чтобы интеграл имел значение конечное и отличное от нуля, причем функция

$$V = e^{xt} QZ$$

должна возвращаться к своему начальному значению, после того как t опишет всю линию C (контур C может быть как замкнутым, так и незамкнутым). В случае уравнения (а,1) имеем

$$P = t^2 + 2n, \qquad Q = -2t, \qquad Z = -\frac{1}{2t^{n+1}} e^{-\frac{t^2}{4}}, \qquad V = \frac{1}{t^n} e^{xt - \frac{t^2}{4}},$$

---

[1]) См., например, *Э. Гурса*, Курс математического анализа, т. II, Гостехиздат, 1933; *В. И. Смирнов*, Курс высшей математики, т. III; часть 2, «Наука», 1974.

так что его решение имеет вид

$$y = \int e^{xt - \frac{t^2}{4}} \frac{dt}{t^{n+1}}. \tag{a,2}$$

Для физических применений достаточно ограничиться рассмотрением значений $n > -1/2$. Для таких n можно выбрать в качестве пути интегрирования контуры C_1 или C_2 (рис. 52), удовлетворяющие необходимым условиям, поскольку на их концах ($t = +\infty$ или $t = -\infty$) функция V обращается в нуль[1].

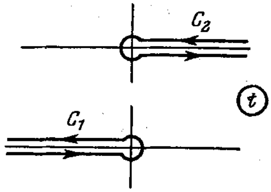

Рис. 52

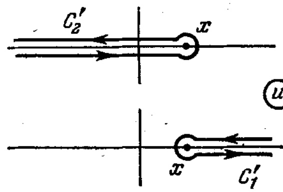

Рис. 53

Выясним, при каких значениях параметра n уравнение (а,1) имеет решения, конечные при всех конечных значениях x и стремящиеся при $x \to \pm\infty$ к бесконечности не быстрее конечной степени x. Рассмотрим сначала нецелые значения n. Интегралы (а,2) по C_1 и C_2 дают здесь два независимых решения уравнения (а,1). Преобразуем интеграл по C_1, введя переменную u согласно $t = 2(x - u)$. Находим, опуская постоянный множитель,

$$y = e^{x^2} \int\limits_{C_1'} \frac{e^{-u^2}}{(u-x)^{n+1}} du, \tag{a,3}$$

где интегрирование производится по контуру C_1 в плоскости комплексного переменного u, изображенному на рис. 53.

При $x \to +\infty$ весь путь интегрирования C_1' сдвигается на бесконечность, и интеграл в формуле (а,3) стремится к нулю, как e^{-x^2}. Но при $x \to -\infty$ путь интегрирования простирается вдоль всей вещественной оси, и интеграл в (а,3) не стремится к нулю экспоненциально, так что функция $y(x)$ обращается в бесконечность в основном, как e^{x^2}. Аналогично легко убедиться в том, что интеграл (а,2) по контуру C_2 расходится экспоненциально при $x \to +\infty$.

При целых же положительных значениях n (включая значение нуль) интегралы вдоль прямолинейных участков пути интегрирования взаимно уничтожаются, и оба интеграла (а,3) — по C_1' и

[1]) Эти пути непригодны при целых отрицательных n, поскольку при таких n интеграл (а,2) вдоль них обратился бы тождественно в нуль.

C_2' — сводятся к интегралу по замкнутому пути вокруг точки $u = x$. Таким образом, мы получим решение

$$y(x) = e^{x^2} \oint \frac{e^{-u^2}}{(u-x)^{n+1}}\, du,$$

удовлетворяющее поставленным условиям. Согласно известной формуле Коши для производных от аналитической функции

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\, dt$$

это есть, с точностью до постоянного множителя, *полином Эрмита*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{a,4}$$

В раскрытом виде полином H_n, расположенный по убывающим степеням x, имеет вид

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}(2x)^{n-4} - \ldots \tag{a,5}$$

Он содержит степени x только той же четности, что и число n. Выпишем несколько первых полиномов Эрмита

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = 4x^2 - 2, \quad H_3 = 8x^3 - 12x, \\ H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12. \tag{a,6}$$

Для вычисления нормировочного интеграла заменяем $e^{-x^2}H_n$ выражением из (a,4) и, интегрируя n раз по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n H_n}{dx^n}\, dx.$$

Но $\frac{d^n H_n}{dx^n}$ есть постоянная, равная $2^n n!$; в результате получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}. \tag{a,7}$$

§ b. Функция Эйри

Уравнение

$$y'' - xy = 0 \tag{b,1}$$

тоже относится к типу Лапласа. Следуя общему методу, составляем функции

$$P = t^2, \qquad Q = -1, \qquad Z = -e^{-\frac{t^3}{3}}, \qquad V = e^{xt - \frac{t^3}{3}},$$