C_2' — сводятся к интегралу по замкнутому пути вокруг точки $u = x$. Таким образом, мы получим решение

$$y(x) = e^{x^2} \oint \frac{e^{-u^2}}{(u-x)^{n+1}}\, du,$$

удовлетворяющее поставленным условиям. Согласно известной формуле Коши для производных от аналитической функции

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(t)}{(t-x)^{n+1}}\, dt$$

это есть, с точностью до постоянного множителя, *полином Эрмита*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}. \tag{a,4}$$

В раскрытом виде полином H_n, расположенный по убывающим степеням x, имеет вид

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2}(2x)^{n-4} - \ldots \tag{a,5}$$

Он содержит степени x только той же четности, что и число n. Выпишем несколько первых полиномов Эрмита

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = 4x^2 - 2, \quad H_3 = 8x^3 - 12x, \\ H_4 = 16x^4 - 48x^2 + 12. \tag{a,6}$$

Для вычисления нормировочного интеграла заменяем $e^{-x^2}H_n$ выражением из (a,4) и, интегрируя n раз по частям, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n H_n(x) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n H_n}{dx^n}\, dx.$$

Но $\frac{d^n H_n}{dx^n}$ есть постоянная, равная $2^n n!$; в результате получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi}. \tag{a,7}$$

§ b. Функция Эйри

Уравнение

$$y'' - xy = 0 \tag{b,1}$$

тоже относится к типу Лапласа. Следуя общему методу, составляем функции

$$P = t^2, \qquad Q = -1, \qquad Z = -e^{-\frac{t^3}{3}}, \qquad V = e^{xt - \frac{t^3}{3}},$$

так что решение может быть представлено в виде

$$y(x) = \mathrm{const} \cdot \int_C e^{xt - \frac{t^3}{3}} dt, \qquad (\text{b},2)$$

причем путь интегрирования C должен быть выбран так, чтобы на обоих его концах функция V обращалась в нуль. Для этого эти концы должны уходить на бесконечность в тех областях плоскости комплексного переменного t, в которых $\mathrm{Re}\,(t^3) > 0$ (на рис. 54 эти области заштрихованы).

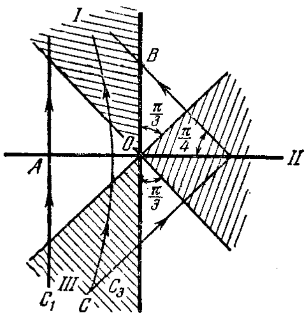

Рис. 54

Решение, конечное при всех x, получим, выбрав путь C так, как это изображено на рисунке. Он может быть смещен произвольным образом, при условии только, чтобы его концы уходили на бесконечность в тех же двух заштрихованных секторах (I и III на рис. 54). Заметим, что, выбрав путь, проходящий, например, в секторах III и II, мы получили бы решение, обращающееся при $x \to \infty$ в бесконечность.

Смещая путь C так, чтобы он совпал с мнимой осью, получаем функцию (b,2) в виде (делаем подстановку $t = iu$)

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos\left(ux + \frac{u^3}{3}\right) du. \qquad (\text{b},3)$$

Постоянную const в (b,2) мы положили равной $-i/2\sqrt{\pi}$ и обозначили определенную таким образом функцию посредством $\Phi(x)$; ее называют *функцией Эйри* [1]).

Асимптотическое выражение для $\Phi(x)$ при больших значениях x можно получить, вычисляя интеграл (b,2) методом перевала. При $x > 0$ показатель степени в подынтегральном выражении имеет экстремум при $t = \pm\sqrt{x}$, а направление его «наиболее крутого спада» параллельно мнимой оси. Соответственно этому, для получения асимптотического выражения для больших положительных значений x разлагаем показатель по степеням

[1]) Мы следуем определению, предложенному *В. А. Фоком* (см. *Г. Д. Яковлева*, Таблицы функций Эйри, «Наука», 1969; $\Phi(x)$ — одна из двух введенных Фоком функций, обозначаемая им как $V(x)$). В литературе используется также определение функции Эйри, отличающееся от (b,3) постоянным множителем:

$$\mathrm{Ai}\,x = \Phi(x)/\sqrt{\pi}, \quad \text{так что} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Ai}\,x\,dx = 1.$$

$t+\sqrt{x}$ и интегрируем вдоль прямой C_1 (см. рис. 54), параллельной мнимой оси (расстояние $OA=\sqrt{x}$). Делая подстановку $t=-\sqrt{x}+iu$, получаем

$$\Phi(x)\approx\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}-\sqrt{x}\,u^2\right)du,$$

откуда

$$\Phi(x)\approx\frac{1}{2x^{1/4}}e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}. \tag{b,4}$$

Таким образом, при больших положительных x функция $\Phi(x)$ затухает экспоненциально.

Для получения асимптотического выражения при больших отрицательных значениях x замечаем, что при $x<0$ показатель степени имеет экстремумы при

$$t=i\sqrt{|x|}\quad\text{и}\quad t=-i\sqrt{|x|},$$

а направление наиболее крутого спада в этих точках — соответственно вдоль прямых под углами $\mp\pi/4$ к вещественной оси. Выбирая в качестве пути интегрирования ломаную линию C_3 (расстояние $OB=\sqrt{|x|}$), получим после простых преобразований

$$\Phi(x)=\frac{1}{|x|^{1/4}}\sin\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right). \tag{b,5}$$

Таким образом, в области больших отрицательных x функция $\Phi(x)$ имеет осциллирующий характер. Укажем, что первый (наибольший) максимум функции $\Phi(x)$ есть $\Phi(-1{,}02)=0{,}95$.

Функция Эйри может быть выражена посредством бесселевых функций порядка 1/3. Уравнение (b,1), как легко убедиться, имеет решение

$$\sqrt{x}\,Z_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right),$$

где $Z_{1/3}(x)$ — любое решение уравнения Бесселя порядка 1/3. Решение, совпадающее с (b,3), есть

$$\Phi(x)=\frac{\sqrt{\pi x}}{3}\left[I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)-I_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right]\equiv\sqrt{\frac{x}{3\pi}}K_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\quad\text{при}\quad x>0, \tag{b,6}$$

$$\Phi(x)=\frac{\sqrt{\pi|x|}}{3}\left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right)+J_{1/3}\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}\right)\right]\quad\text{при}\quad x<0,$$

где

$$I_\nu(x)=i^{-\nu}J_\nu(ix),\qquad K_\nu(x)=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}[I_{-\nu}(x)-I_\nu(x)].$$

С помощью рекуррентных соотношений

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x), \quad 2K'_\nu(x) = -K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x)$$

легко найти для производной функции Эйри выражение

$$\Phi'(x) = -\frac{x}{\sqrt{3\pi}} K_{2/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \quad \text{при} \quad x > 0. \tag{b,7}$$

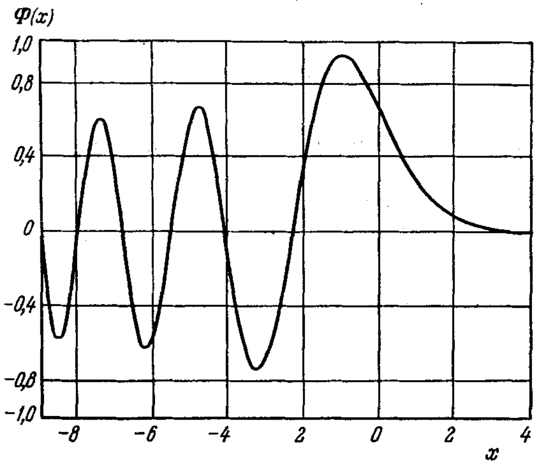

Рис. 55

При $x = 0$

$$\Phi(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{3^{2/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} = 0{,}629, \qquad \Phi'(0) = -\frac{3^{1/6}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{2\sqrt{\pi}} = -0{,}459. \tag{b,8}$$

На рис. 55 дан график функции Эйри.

§ c. Полиномы Лежандра[1]

Полиномы Лежандра $P_l(\cos\theta)$ определяются формулой

$$P_l(\cos\theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{(d\cos\theta)^l} (\cos^2\theta - 1)^l. \tag{c,1}$$

[1]) В математической литературе есть много хороших изложений теории шаровых функций. Здесь мы приводим для справок лишь некоторые основные соотношения, совершенно не занимаясь систематическим изложением теории этих функций.