

# Избранные главы математической физики

И. В. Колоколов и В. В. Лебедев

*Институт теоретической физики имени Л.Д.Ландау РАН*

В настоящем пособии обсуждаются математические задачи, возникающие в различных физических ситуациях, а также способы их решения. Рассматриваются линейные задачи, которые описываются дифференциальными задачами в частных производных, с начальными и граничными условиями, анализ ведется на языке функций Грина. Представлены сведения об основных специальных функциях, их свойства, включая поведение в комплексной плоскости и асимптотическое поведение. Приводятся основные сведения по нелинейным динамическим системам, включая так называемые точно решаемые уравнения, допускающие солитонные решения.

## CONTENTS

1. Введение	1
2. Эволюционные задачи	2
3. Граничные задачи	5
4. Уравнения Шрёдингера и диффузии	8
5. Динамо	9
6. Квантовые вихри	10
7. Уравнения на медленные переменные	12
8. Гамма-функция Эйлера	14
9. Функции Бесселя	17
10. Полиномы Лежандра	20
11. Полиномы Эрмита	23
12. Вырожденная гипергеометрическая функция	25
13. Уравнения Хопфа и Бюргера	27
14. Уравнение Кортевега-де-Фриза	29
15. Уравнение синус-Гордон	29
16. Нелинейное уравнение Шрёдингера	32
17. Отдельные вопросы	34
А. $\delta$ -функция Дирака	34
В. Преобразование Фурье	36
С. Преобразование Лапласа	37
D. Собственные функции оператора	39
18. Отдельные методы	40
А. Метод характеристик	40
В. Метод перевала и стационарной фазы	41
С. Метод Лапласа	42
D. Метод WKB	44
E. Нётеровские интегралы движения	44

## Список литературы

46

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии мы представим подходы, которые используются в теоретической физике для решения задач, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений, включая нелинейные уравнения и уравнения в частных производных, то есть уравнений полевых. Значимость этих сюжетов была установлена в ходе развития физики.

Осознание важности решения дифференциальных уравнений и связанных с ними задач восходит к тому же времени, когда был достигнут первый грандиозный успех современной теоретической физики – объяснение Ньютоном формы орбит планет на основе законов механики. Хотя сам Ньютон зачастую предпочитал пользоваться геометрическими методами, он хорошо сознавал, что наиболее адекватным языком созданной им конструкции являются именно дифференциальные уравнения.

В течение восемнадцатого века параллельно с быстрым ростом качества астрономических наблюдений происходило уточнение законов движения планет и более мелких астрономических объектов (комет, астероидов), связанное с воздействием на них других планет. На этом пути родилась, по современной терминологии, теория возмущений. В частности, было осознано, что в некоторых случаях даже слабое возмущение способно за большое время сильно исказить орбиту. Так появились так называемые секулярные члены.

В том же восемнадцатом веке возник новый предмет изучения – гидродинамика. Эйлер и Лагранж сформулировали основные уравнения, которым подчиняется движение любой жидкости. И эти уравнения оказались дифференциальными уравнениями в частных производных. Впоследствии эти уравнения были уточнены Навье и Стоксом, которые включили в рассмотрение вязкость. Гидродинамика оказалась удивительно богатой на различные явления, что связано с существенной ролью нелинейности в динамике жидкости.

Гидродинамика на долгие годы стала тем полиго-

ном, на котором испытывались различные методы математической физики. Особенно богатым в этом отношении оказался период конца девятнадцатого – начала двадцатого века, когда были поставлены и решены многие гидродинамические задачи. Эта наука не исчерпана до сих пор, например, не существует последовательной теории турбулентности, то есть хаотического состояния жидкости, которое возникает при больших числах Рейнольдса.

Однако гидродинамика сыграла и еще одну очень важную роль – она стала парадигмой, на основе которой строилось понимание других физических явлений. Именно гидродинамика послужила плацдармом, с которого началась осознание таких явлений, как термодинамика и электромагнетизм. И хотя понятия флогистона и эфира были впоследствии отброшены, как слишком грубые модели явлений, использующие прямые аналогии с жидкостью, сам подход, связанный с дифференциальными уравнениями в частных производных, восходящий к гидродинамике, оказался чрезвычайно плодотворным. Именно на этом пути в течение девятнадцатого века в физике родилось современное понятие поля.

В девятнадцатом веке произошло первое великое объединение – постепенно было осознано, что такие явления, как электричество, магнетизм и распространение света являются проявлениями единой сущности – электромагнитного поля. Впоследствии к свету добавились электромагнитные волны различной длины волны, от радиоволн до рентгеновского излучения. И описание всех этих явлений в рамках единой теории электромагнитного поля остается одним из самых значимых достижений физики. Это описание базируется на дифференциальных уравнениях в частных производных.

По мере расширения круга задач, с которыми имеет дело физика, выяснилось, что далеко не во всех случаях для анализа можно обойтись элементарными функциями. Поэтому в течение восемнадцатого-девятнадцатого века в оборот математической физики были введены более сложные функции, которые называются специальными. Репертуар специальных функций установился к началу двадцатого века. Подчеркнем, что использование специальных функций тесно связано с теорией функций комплексного переменного, построенной в основном в девятнадцатом веке.

В течение девятнадцатого века было осознано, что теоретическая физика имеет дело с разнообразными асимптотическими пределами. В связи с этим в математической физике были разработаны методы определения асимптотического поведения различных функций и решений разнообразных уравнений. С другой стороны, выявилась значительная роль законов сохранения, происхождение которых было выявлено уже в двадцатом веке.

При построении в первой половине двадцатого века теории относительности (как специальной, так и общей) и квантовой механики использовались в ос-

новном методы, разработанные в рамках теории классического поля. Это частично объясняет удивительно высокий темп создания этих разделов физики. Например, уравнение Шрёдингера представляет собой типичное полевое уравнение в частных производных.

В ходе дальнейшего развития в двадцатом веке в теоретической физике возникли области, исследования в рамках которых приводят к интегродифференциальным уравнениям. Примерами могут служить кинетика, которая исследуется в рамках кинетического уравнения, или квантовая теория поля. Эти области лежат вне рамок настоящего пособия.

В то же время в двадцатом веке чрезвычайно расширилась область применимости методов классического поля. Речь идет о динамике любой среды, которую можно рассматривать, как непрерывную. Приведем в качестве примера плазму, которая чрезвычайно богата на различные динамические явления. Подчеркнем также, что плазма может существовать на различных масштабах, от космических до ядерных (так называемая кварк-глюонная плазма), способ ее описания от этого принципиально не меняется.

В связи с бурным развитием динамики непрерывных сред во второй половине двадцатого века были сформулированы базисные нелинейные полевые уравнения, которые описывают ключевые динамические явления в самых разных физических ситуациях. Это в основном уравнения для полей, зависящих от времени и одной координаты. Поразительным образом оказалось, что большинство этих базисных уравнений приводят к бесконечному набору законов сохранения. С другой стороны, эти уравнения допускают аналитическое построение весьма сложных решений, которые обычно называют солитонными.

Все перечисленные сюжеты так или иначе нашли отражение в настоящем пособии. Конечно, его нельзя назвать исчерпывающим. Однако мы надеемся, что приведенный в нем материал позволит освоившему его читателю ориентироваться в значительном числе разделов современной математической физики.

## 2. ЭВОЛЮЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Во многих физических приложениях возникает задача о реакции системы на внешнее воздействие, выводящее ее из равновесия. Чтобы найти состояние системы в данный момент времени, надо решить эволюционную задачу, поскольку это состояние будет определяться предисторией системы. Если отклонение системы от равновесия невелико, то ее реакцию на внешнее воздействие можно изучать в рамках линейных уравнений.

Рассмотрим простейший пример уравнения, которое описывает релаксацию системы к равновесию:

$$\frac{dx}{dt} + \gamma x = \phi, \quad (2.1)$$

где  $x(t)$  – переменная, описывающая отклонение системы от равновесия,  $\gamma$  – кинетический коэффициент (некоторый положительный параметр), а величина  $\phi(t)$  представляет внешнее воздействие, выводящее систему из равновесия. Уравнение (2.1) возникает, например, при описании движения частицы в сильно вязкой среде, когда ее инерционными свойствами можно пренебречь. Решение уравнения (2.1) можно записать, как интеграл

$$x(t) = \int ds G(t-s)\phi(s). \quad (2.2)$$

Здесь  $G(t)$  – так называемая функция Грина, которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{dG}{dt} + \gamma G = \delta(t), \quad (2.3)$$

то есть уравнению (2.1) с  $\phi = \delta(t)$ . (Основные свойства  $\delta$ -функции приведены в разделе 17 А.) Это утверждение проверяется непосредственно: применяя к правой части (2.2) оператор  $d/dt + \gamma$  и пользуясь затем соотношением (2.3), мы находим, что  $x(t)$  является решением уравнения (2.1).

Однако функция Грина  $G(t)$  неоднозначно определена уравнением (2.3), поскольку его решение определено с точностью до решения однородного (то есть без правой части) уравнения (2.1). Для того, чтобы однозначно определить функцию Грина  $G(t)$ , необходимо привлечь принцип причинности. Из соотношения (2.2) следует, что  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ , поскольку система может реагировать только на воздействие, имевшее место в прошлом. Принцип причинности уже однозначно фиксирует функцию Грина. В силу того, что  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ , выражение (2.2) можно переписать в следующем виде

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds G(t-s)\phi(s). \quad (2.4)$$

Здесь подразумевается, что внешнее воздействие  $\phi$  действует на систему на полном временном интервале, от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Найдем явное выражение для функции Грина  $G(t)$ , которая определяется уравнением (2.3). Поскольку  $\delta(t)$  равна нулю при  $t > 0$ , то в этой области  $G(t)$  является решением однородного уравнения (2.1), то есть  $G(t) = A \exp(-\gamma t)$ , где  $A$  – некоторая константа. Учитывая, что  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ , мы заключаем, что при  $t = 0$  функция  $G(t)$  испытывает скачок  $A$ . В силу уравнения (2.3) и соотношения (17.8) этот скачок должен быть равен единице. Таким образом,  $A = 1$ , и мы находим окончательно

$$G(t) = \theta(t) \exp(-\gamma t). \quad (2.5)$$

Подставляя это выражение в соотношение (2.4), мы находим

$$x(t) = \int_{-\infty}^t ds \exp[-\gamma(t-s)]\phi(s). \quad (2.6)$$

Таким образом, система постепенно (за время  $\gamma^{-1}$ ) забывает о воздействии на нее, которое было в прошлом.

Выражение (2.4) или (2.6) подразумевает, что мы рассматриваем эволюцию системы на бесконечном временном интервале. В то же время широко распространены задачи, когда состояние системы задано в начальный момент времени, а далее она эволюционирует под внешним воздействием. Будем отсчитывать время от момента, когда задано начальное состояние. Тогда вместо (2.4) решение уравнения переписывается в следующем виде

$$x(t) = x(0)G(t) + \int_0^t ds G(t-s)\phi(s), \quad (2.7)$$

где  $x(0)$  – начальное значение переменной  $x$ . Действительно, выражение (2.7) удовлетворяет исходному уравнению и начальному условию, поскольку  $G(+0) = 1$ .

**Задача 2.1.** *Найти решение задачи Коши для уравнения (2.1) при нулевых начальных условиях и  $\phi = \exp(-\alpha t)$ ,  $\alpha > 0$ . Как выглядит решение при  $\alpha \rightarrow \gamma$ ?*

Рассмотрим более сложный пример, а именно уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \nu^2 x = \phi, \quad (2.8)$$

где  $\nu$  имеет смысл собственной частоты колебаний системы. Решение уравнения (2.8) можно записать через функцию Грина  $G(t)$ , в виде (2.2) или (2.4). Функция  $G(t)$  удовлетворяет уравнению (2.8) с  $\delta$ -функцией в правой части:

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \nu^2 \right) G(t) = \delta(t). \quad (2.9)$$

Найдем решение этого уравнения.

Как мы уже установили, в силу причинности  $G(t) = 0$  при  $t < 0$ . В отличие от функции Грина (2.5), решение уравнения (2.9) остается непрерывным при  $t = 0$  в силу того, что в его левой части стоит вторая производная по  $t$ . В этом случае  $\delta$ -функция производится, если скачок испытывает первая производная от функции, смотри раздел 17 А. Используя соотношение (17.8), легко найти, что скачок первой производной в  $G(t)$  должен быть равен 1. Таким образом, мы получаем, что при  $t = +0$   $G = 0$ ,  $G' = 1$ . Эти значения можно рассматривать, как начальные условия для однородного уравнения, определяющего  $G(t)$  при  $t > 0$ , поскольку правая часть уравнения (2.9) в этом случае равна нулю. Задача легко решается, и мы находим

$$G(t) = \theta(t) \frac{1}{\nu} \sin(\nu t). \quad (2.10)$$

Обратим внимание на осциллирующий характер функции Грина.

Выражение (2.4) дает решение уравнения (2.8) на бесконечном временном интервале. Но, как и выше, при помощи функции Грина можно выразить и решение задачи Коши, то есть задачи с начальными условиями. В данном случае мы имеем дело с уравнением второго порядка, то есть этими условиями являются значения функции и ее производной,  $x$  и  $\dot{x}$ , в начальный момент времени, в качестве которого мы выберем  $t = 0$ . Решение задачи Коши для уравнения (2.8) записывается в следующем виде

$$x(t) = \dot{x}(0)G(t) + x(0)\dot{G}(t) + \int_0^t ds G(t-s)\phi(s). \quad (2.11)$$

Это выражение, очевидно, удовлетворяет уравнению (2.8), а также начальным условиям, что легко проверить с использованием соотношений  $G(+0) = 0$ ,  $\dot{G}(+0) = 1$ ,  $\ddot{G}(+0) = 0$ , следующих из выражения (2.10).

**Задача 2.2.** Найти решение задачи Коши для уравнения (2.8) при нулевых начальных условиях и  $\phi = \exp(-\alpha t)$ ,  $\alpha > 0$ .

В принципе, решение любого линейного эволюционного уравнения можно выразить через соответствующую функцию Грина. Однако этот способ эффективен, если известно явное выражение для функции Грина. Его можно найти для уравнений вида

$$L(d/dt)x = \phi, \quad (2.12)$$

где  $L(z)$  – некоторый полином от  $z$ . Именно к типу (2.12) относятся рассмотренные нами выше уравнения (2.1,2.8). Решение уравнения (2.12) записывается в виде (2.2), где функция Грина удовлетворяет уравнению

$$L(d/dt)G(t) = \delta(t), \quad (2.13)$$

и условию  $G = 0$  при  $t < 0$ . Заметим, что если старшая производная в  $L(d/dt)$  равна  $(d/dt)^n$ , то для всех  $m < n$  производные  $(d/dt)^m G(0) = 0$ . Выше мы нашли явные выражения для функций Грина уравнений (2.1,2.8). Изложим теперь метод, применимый для уравнения (2.12) общего вида.

Поскольку функция Грина отлична от нуля только при положительных временах, естественно рассмотреть ее преобразование Лапласа, смотри раздел (17С):

$$\tilde{G}(p) = \int_0^\infty dt \exp(-pt)G(t).$$

Учитывая, что преобразование Лапласа от  $\delta$ -функции равно единице, находим из (2.13) соотношение

$$\int_0^\infty dt \exp(-pt)L(d/dt)G(t) = 1.$$

Произведем теперь интегрирование по частям в производных  $(d^n/dt^n)G$ . Учитывая, что все содержащиеся в  $L(d/dt)$  производные от функции Грина  $G(t)$  в

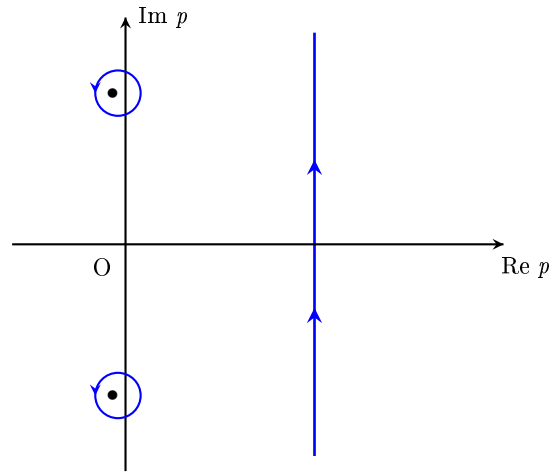


Рис. 1. Преобразование контура, по которому идет интегрирование в обратном преобразовании Лапласа.

нуле равны нулю (за исключением старшей), мы приходим к выводу, что внеинтегральные члены при интегрировании по частям не возникают, и мы находим

$$\tilde{G}(p) = 1/L(p). \quad (2.14)$$

Таким образом,  $\tilde{G}(p)$  имеет полюса, которые определяются нулями полинома  $L(p)$ .

Обратное преобразование Лапласа имеет вид (17.25), то есть

$$G(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt)\tilde{G}(p). \quad (2.15)$$

Контур интегрирования в этом выражении показан на рисунке 12. При  $t < 0$  мы можем смещать контур интегрирования вправо, поскольку  $e^{pt}$  при этом стремится к нулю. В результате мы заключаем, что при  $t < 0$  функция Грина равна нулю, как и должно быть. При  $t > 0$  мы можем смещать контур интегрирования влево, поскольку  $e^{pt}$  при этом стремится к нулю. При таком смещении мы будем наткнуться на полюсы  $\tilde{G}(p)$ . Далее контур можно “протащить” через полюса, добавив контура, идущие вокруг полюсов. При дальнейшем сдвиге влево мы получаем нулевой вклад в интеграл по прямой, поскольку  $e^{pt}$  стремится к нулю. Таким образом, интеграл сводится к сумме контурных интегралов, идущих вокруг полюсов  $\tilde{G}(p)$ , смотри рисунок 1. Каждый такой интеграл сводится к вычету в полюсе, и мы находим

$$G(t) = \sum_i \text{res}_i \exp(pt)/L(p), \quad (2.16)$$

где суммирование идет по полюсам  $\tilde{G}(p)$ , то есть нулям  $L(p)$ .

**Задача 2.3.** Найти выражения для функций Грина (2.5,2.10), исходя из соотношения (2.16).

Для устойчивой системы все полюса выражения (2.14) лежат в левой полуплоскости по  $p$ , что соответствует затуханию возмущений в отсутствие внешнего воздействия. В то же время для неустойчивой системы имеются полюса выражения (2.14) в правой полуплоскости. Вычеты в этих полюсах породят вклад в функцию Грина  $G(t)$ , расходящийся на больших  $t$ , в соответствии с (2.16).

**Задача 2.4.** Найдите функцию Грина уравнения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \nu^2 x = \phi.$$

**Задача 2.5.** Найдите функцию Грина уравнения

$$\left( \frac{d^4}{dt^4} + 4\nu^2 \frac{d^2}{dt^2} + 3\nu^4 \right) x = \phi.$$

**Задача 2.6.** Найдите функцию Грина уравнения

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \nu^2 \right)^2 x = \phi.$$

При решении задачи с нулевыми начальными условиями при  $t = 0$  мы имеем

$$x(t) = \int_0^t ds G(t-s)\phi(s), \quad (2.17)$$

где функция  $\phi(t)$  представляет внешнее воздействие. Производя преобразование Лапласа обеих частей уравнения (2.17), находим

$$\tilde{x}(p) = \tilde{G}(p)\tilde{\phi}(p). \quad (2.18)$$

Таким образом, если известны  $\tilde{G}(p)$  и  $\tilde{\phi}(p)$ , то  $x(t)$  можно представить в виде интеграла (17.25).

**Задача 2.7.** Найдите  $x(t)$  для  $\tilde{G} = 1/\sqrt{p}$  и начального короткого воздействия, то есть  $\tilde{\phi}(p) = 1$ .

### 3. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

В разделе 2 мы рассматривали задачи эволюционного типа, когда решение определялось внешним воздействием и начальными условиями, взятыми в начальный момент времени. Однако весьма важны также краевые или граничные задачи, когда искомая функция удовлетворяет каким-либо условиям на границах некоторой области в пространстве. Простейшие по постановке краевые задачи и соответствующие функции Грина возникают в электростатике, когда, например, требуется найти поле системы (распределенных) зарядов в присутствии проводников. Более сложные задачи такого типа возникают при исследовании распространения электромагнитных волн.

Здесь мы будем изучать одномерный случай, когда область, в которой мы будем искать решение краевых задач, является просто интервалом  $(a, b)$ . Тогда условия на интересующие нас функции накладываются на границах интервала, при  $x = a$  и/или  $x = b$ .

Рассмотрим в качестве примера потенциал  $\Phi$  распределения заряда, плотность которого  $\rho$  зависит только от одной координаты  $x$ . В этом случае потенциал также зависит только от координаты  $x$  и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} \Phi = -4\pi\rho. \quad (3.1)$$

Поскольку уравнение (3.1) является дифференциальным уравнением второго порядка, его надо дополнить граничными условиями. Если, например, речь идет об области пространства между заземленными параллельными металлическими поверхностями, заданными условиями  $x = a$  и  $x = b$ , то граничные условия имеют вид  $\Phi(a) = \Phi(b) = 0$ . Мы будем говорить о таких граничных условиях, как нулевых.

Введем теперь соответствующую уравнению (3.1) функцию Грина  $G(x, y)$ , которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x, y) = \delta(x - y), \quad a < x, y < b, \quad (3.2)$$

а также граничным условиям  $G(a, y) = G(b, y) = 0$ . Обратим внимание на то, что функция Грина зависит теперь от обеих переменных, а не просто от их разности, как это было в предыдущей лекции. Это связано с нарушением однородности пространства за счет границ. Решение уравнения (3.1) с нулевыми граничными условиями запишется в виде

$$\Phi(x) = \int_a^b dy G(x, y)[-4\pi\rho(y)]. \quad (3.3)$$

Очевидно, выражение (3.3) удовлетворяет уравнению (3.1) в силу (3.2) и нулевым граничным условиям, поскольку им удовлетворяет функция Грина.

Найдем явное выражение для функции Грина  $G(x, y)$ . Для этого заметим, что при  $x < y$  уравнение (3.2) сводится к  $\partial_x^2 G = 0$ , что дает  $G(x, y) = A(x - a)$ , где  $A$  — некоторая константа. Это общее решение уравнения с нулевым граничным условием при  $x = a$ . Аналогично, при  $x > y$  мы находим  $G(x, y) = B(x - b)$ , где  $B$  — другая константа. Это выражение удовлетворяет тому же уравнению  $\partial_x^2 G = 0$  и нулевому граничному условию при  $x = b$ . Поскольку функция Грина удовлетворяет уравнению второго порядка по  $x$ , она должна быть непрерывной в точке  $x = y$ , что дает соотношение  $A(y - a) = B(y - b)$ . Далее, скачок производной функции Грина  $G(x, y)$  в точке  $x = y$  равен  $B - A$ , что в силу уравнения (3.2) должно быть равно единице. Решая полученные уравнения для  $A$  и  $B$ , и подставляя результат в выражение для функции Грина, мы

находим

$$G(x, y) = \begin{cases} (y - b)(x - a)(b - a)^{-1}, & x < y, \\ (y - a)(x - b)(b - a)^{-1}, & x > y. \end{cases} \quad (3.4)$$

Обратим внимание на то, что функция Грина (3.4) симметрична:  $G(x, y) = G(y, x)$ .

Рассмотрим теперь более общую задачу, которая ставится для функции  $f(x)$  на интервале  $a < x < b$  и формулируется в виде следующего дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} \hat{L}f(x) &= \phi, \\ \hat{L} &= \frac{d^2}{dx^2} + Q\frac{d}{dx} + U, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $\hat{L}$  называется дифференциальным оператором Штурма-Лиувилля. Здесь ‘сила’  $\phi$  и факторы  $Q, U$  являются заданными функциями  $x$ . Решение уравнения (3.5) подразумевает наложение некоторых граничных условий на функцию  $f(x)$  на границах интервала, то есть при  $x = a$  и  $x = b$ . Они не обязательно должны быть нулевыми, возможны и другие варианты. Например, встречаются нулевые условия на производную  $f'$  в точках  $x = a$  и  $x = b$  или смешанные граничные условия, связывающие значения производной  $f'$  и функции  $f$  в точках  $x = a$  и  $x = b$ .

Решение уравнения (3.5) можно по аналогии с (3.3) написать в виде свертки правой части уравнения (3.5) с функцией Грина  $G(x, y)$ :

$$f(x) = \int_a^b dy G(x, y)\phi(y), \quad (3.7)$$

которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\hat{L}G(x, y) = \delta(x - y) \quad (3.8)$$

и соответствующим граничным условиям при  $x = a$  и  $x = b$ . Действительно, интеграл в формуле (3.7) удовлетворяет уравнению (3.5) в силу (3.8) и граничным условиям по построению.

Любой функции  $\mathcal{H}(x, y)$  можно сопоставить оператор  $\hat{\mathcal{H}}$ , действие которого на функцию  $f(x)$  представляется сверткой:

$$\hat{\mathcal{H}}f = \int_a^b dy \mathcal{H}(x, y)f(y). \quad (3.9)$$

Единичному оператору, очевидно, соответствует  $\delta$ -функция, так как

$$\int_a^b dy \delta(x - y)f(y) = f(x),$$

если  $a < x < b$ . Действие дифференциального оператора (3.6) также может быть переписано в виде (3.9) с помощью  $\delta$ -функции и ее производных, но обычно

проще придерживаться традиционных обозначений. Равенство (3.8) означает, что  $\hat{G} = \hat{L}^{-1}$ . Таким образом, аргументы  $x, y$  можно рассматривать, как обобщение матричных и векторных индексов в линейной алгебре. Отличием от конечномерного случая является необходимость фиксации класса функций (который определяется граничными условиями), на котором действует соответствующий оператор.

Приведенная выше конструкция, работающая при  $Q = U = 0$ , подсказывает нам, как найти функцию Грина  $G(x, y)$  в случае произвольного оператора Штурма-Лиувилля (3.6). Введем сначала два решения однородного уравнения (3.8)  $u$  и  $v$  (то есть  $\hat{L}u = 0 = \hat{L}v$ ), которые удовлетворяют ‘левому’ (при  $x = a$ ) и ‘правому’ (при  $x = b$ ) граничным условиям, соответственно. Например, для нулевых граничных условий  $u(a) = 0$  и  $v(b) = 0$ . Функцию Грина надо искать в виде

$$G(x, y) = \begin{cases} Au(x), & x < y, \\ Bv(x), & x > y, \end{cases} \quad (3.10)$$

где  $A, B$  – некоторые параметры, не зависящие от  $x$ . Тогда уравнение (3.8) будет выполняться при  $x < y$  и  $x > y$  вместе с граничными условиями при  $x = a$  и  $x = b$ . Константы же  $A$  и  $B$  определяются условием непрерывности функции Грина при  $x = y$  и единичным значением скачка производной

$$G'(y + 0, y) - G'(y - 0, y) = 1. \quad (3.11)$$

Решая полученную систему линейных уравнений для  $A$  и  $B$ , мы приходим к следующему явному выражению для функции Грина  $G(x, y)$ :

$$G(x, y) = \frac{1}{W(y)} \begin{cases} v(y)u(x), & x < y, \\ v(x)u(y), & x > y. \end{cases} \quad (3.12)$$

Здесь  $W(x)$  – так называемый Вронскиан решений  $u(x)$  и  $v(x)$ , который определяется следующим образом

$$W(x) = u(x)v'(x) - u'(x)v(x). \quad (3.13)$$

Дифференцируя это выражение и используя уравнения  $\hat{L}u = \hat{L}v = 0$ , легко получить соотношение  $W'(x) = -Q(x)W(x)$ , откуда следует

$$W(x) = W(a) \exp \left[ - \int_a^x dy Q(y) \right]. \quad (3.14)$$

Отметим, что при  $Q = 0$  Вронскиан (3.14) не зависит от  $x$  и тогда функция Грина становится симметричной:  $G(x, y) = G(y, x)$ .

Рассмотрим в качестве примера потенциал  $\Phi(r)$  тонкого заряженного цилиндра радиуса  $b$  при условии, что плотность заряда зависит только от расстояния  $r$  от точки наблюдения до оси цилиндра. Уравнение для  $\Phi(r)$  получается из уравнения Пуассона переходом к цилиндрическим координатам:

$$\frac{d^2}{dr^2} \Phi(r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \Phi(r) = -4\pi\rho. \quad (3.15)$$

Выберем значение потенциала на поверхности цилиндра за ноль. Тогда граничными условиями для этой задачи являются  $\Phi(b) = 0$  и отсутствие особенности в  $\Phi$  при  $r = 0$ . Регулярным при  $r = 0$  ‘левым’ решением  $u$  является некоторая константа, которую мы полагаем равной единице,  $u(r) = 1$ . ‘Правое’ же решение  $v$  имеет вид  $v(r) = \ln(r/b)$ , а вронсиан равен  $W(r) = 1/r$ . Поэтому формула (3.12) приводит к следующему выражению для функции Грина оператора в левой части уравнения (3.15):

$$G(r, R) = \begin{cases} b \ln(R/b), & r < R, \\ b \ln(r/b), & r > R. \end{cases} \quad (3.16)$$

Следует отметить, что с точки зрения исходной задачи граничное условие  $\Phi(b) = 0$  было задано на полной границе  $r = b$  области, в которой мы ищем потенциал  $\Phi$ , и этого условия достаточно для его определения. Дополнительное же условие отсутствия особенности при  $r = 0$  возникает из-за перехода к полярной системе координат, приводящему к сингулярности коэффициента при первой производной в уравнении (3.15) в точке  $r = 0$ .

Заметим, что при нулевых граничных условиях и  $Q = 0$  оператор (3.6) является самосопряженным, смотри раздел 17D. Действительно, интегрирование по частям переводит  $\int dx f(d^2/dx^2 + U)g$  в  $\int dx g(d^2/dx^2 + U)f$ , при этом вне-интегральные члены оказываются равными нулю в силу нулевых граничных условий. Оператор  $d^2/dx^2 + U$  является самосопряженным также и на классе периодических функций  $f$ , удовлетворяющих условиям  $f(b) = f(a)$  и  $f'(b) = f'(a)$ , поскольку они также приводят к занулению вне-интегральных членов при интегрировании по частям. Для периодических граничных условий функцию Грина нельзя построить в соответствии с выражением (3.12), так как условия  $f(b) = f(a)$  и  $f'(b) = f'(a)$  связывают значения функции  $f$  на разных концах интервала, так что нельзя ввести ‘левую’ и ‘правую’ функции  $u$  и  $v$ .

Поэтому для периодических функций следует использовать более общее выражение

$$G(x, y) = \sum_n A_n^{-1} \frac{f_n(x)f_n(y)}{\lambda_n}. \quad (3.17)$$

которое корректно, если все его собственные значения  $\lambda_n$  отличны от нуля. Используя соотношение (17.40), легко проверить выполнение уравнения (3.8). Кроме того, функция (3.17) удовлетворяет необходимым граничным условиям. Если же среди собственных значений  $\lambda_n$  оператора  $\hat{L}$  имеются нулевые, то функция Грина не существует. Можно однако, ограничить класс функций  $f$  так, чтобы исключить собственные функции с нулевыми собственными значениями. На этом ограниченном классе функцию Грина уже можно построить.

В качестве примера анализа периодических граничных условий рассмотрим простейший оператор  $\hat{L} =$

$d^2/dx^2$ , а на функцию  $f$  наложим периодические граничные условия на интервале  $0 < x < 2\pi$ . Тогда полный набор собственных функций оператора  $\hat{L}$  будет

$$\cos(nx), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \sin(nx), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.18)$$

что соответствует собственным значениям  $\lambda_n = -n^2$ . Отметим, что для  $n = 1, 2, \dots$  собственные функции нашего оператора являются дважды вырожденными, и что собственные функции (3.18) выбраны так, что выполняется условие ортогональности (17.37). Разложение же (17.38) является не чем иным, как разложением в ряд Фурье периодической функции. Соотношение (17.40) в данном случае приобретает вид

$$\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(nx) \cos(ny) + \sin(nx) \sin(ny)] = \delta(x - y). \quad (3.19)$$

На пространстве периодических функций не существует функции Грина оператора  $\hat{L} = d^2/dx^2$ , поскольку на этом пространстве оператор  $\hat{L} = d^2/dx^2$  имеет нулевое собственное значение, которое достигается при  $n = 0$  в формуле (3.18). Поэтому выражение (3.17) оказывается некорректным. Тем не менее, можно определить функцию Грина оператора  $\hat{L} = d^2/dx^2$  на пространстве функций, где он не имеет нулевых собственных значений. Собственная функция, соответствующая  $\lambda = 0$ , как следует из формулы (3.18), является просто константой:  $f = \text{const}$ . Таким образом, надо исключить из набора (3.18) константу. Это можно сделать, если наложить на функцию  $f$  дополнительное условие  $\int_0^{2\pi} dx f(x) = 0$ . После этого функцию Грина уже можно найти в соответствии с выражением (3.17).

Почитательно найти эту функцию Грина, исходя непосредственно из дифференциального уравнения, которое в данном случае приобретает вид

$$\frac{d^2}{dx^2} G(x - y) = \delta(x - y) - \frac{1}{2\pi}. \quad (3.20)$$

Дополнительный константный член в правой части этого уравнения связан с тем, что интеграл от этой правой части по  $x$  должен быть равен нулю. Таким образом, функцию Грина можно записать в виде  $G(x, y) = |x - y|/2 + c_1 + c_2 x - x^2/(4\pi)$ , где константы  $c_1$  и  $c_2$  находятся из условий периодичности  $G(x - y)$  и условия  $\int_0^{2\pi} dx G(x - y) = 0$ . В результате мы находим

$$G(x - y) = \frac{1}{2}|x - y| - \frac{\pi}{6} - \frac{(x - y)^2}{4\pi}.$$

Отметим, что функция Грина зависит только от разности  $x - y$ , что связано с эффективной однородностью периодической задачи, поскольку интервал, на котором рассматриваются функции  $f$ , можно выбрать в виде  $(w, w + 2\pi)$  с произвольным  $w$ .

**Задача 3.1.** Найти функцию Грина оператора  $d^2/dx^2 + \kappa^2$  для периодических функций с периодом  $2\pi$ .

**Задача 3.2.** Найти решение задачи

$$\frac{d^2}{dx^2}f = \text{sign}(x),$$

на классе периодических функций на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

**Задача 3.3.** Найти решение задачи

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \kappa^2\right)f = \text{sign}(x),$$

на классе периодических функций на интервале  $(-\pi, \pi)$ .

**Задача 3.4.** Доказать, что на интервале  $(-\pi, \pi)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{\sin(x/2)} = 2\pi\delta(x).$$

Указание: найти разложение приведенной функции в ряд Фурье, воспользовавшись соотношением

$$\int_{-\pi}^{+\pi} dx \frac{\sin(kx)}{\sin(x/2)} = 2\pi,$$

справедливому для любого целого положительного  $k$ .

**Задача 3.5.** Найти функцию Грина оператора  $\hat{L} = (d/dx + x)(d/dx - x)$  на интервале  $(-l, +l)$  с нулевыми граничными условиями.

**Задача 3.6.** Найти функцию Грина оператора  $\hat{L} = (d/dx - x)(d/dx + x)$  на интервале  $(-l, +l)$  с нулевыми граничными условиями.

#### 4. УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА И ДИФФУЗИИ

В ряде физических приложений возникают дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами. Примерами таких уравнений являются уравнение диффузии и уравнение Шрёдингера для свободной частицы

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla^2 U, \quad (4.1)$$

$$-i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nabla^2 \Psi. \quad (4.2)$$

Оба эти уравнения подразумевают однородность в пространстве. При решении таких уравнений весьма

эффективным оказывается пространственное преобразование Фурье. В дальнейшем под решением уравнения мы обычно имеем в виду решение задачи Коши, то есть восстановление функции, подчиняющейся заданному уравнению, по ее начальному значению. Если не оговорено обратное, за начальный момент времени принимается  $t = 0$ .

Мы начнем с уравнения диффузии (4.1). Произведём Фурье-преобразование по  $\mathbf{x}$ :

$$U = \int \frac{dq_1 \dots dq_d}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{U}(t, \mathbf{q}). \quad (4.3)$$

Тогда уравнение (4.1) приводит к уравнению  $\partial \tilde{U} / \partial t = -q^2 \tilde{U}$  для Фурье-компоненты, которое имеет очевидное решение  $\tilde{U}(t, \mathbf{q}) = \exp(-q^2 t) \tilde{U}(0, \mathbf{q})$ . Подставляя это выражение и интеграл

$$\tilde{U}(0, \mathbf{q}) = \int dx_1 \dots dx_d \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) U(0, \mathbf{x})$$

обратный к соотношению (4.3), и беря интегралы по  $\mathbf{q}$ , мы находим

$$U(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi t)^{d/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t}\right] U(0, \mathbf{y}). \quad (4.4)$$

Соотношение (4.4) в принципе решает задачу Коши, которая заключается в нахождении решения данного дифференциального уравнения по начальному значению функции.

Если начальное поле  $U(0, \mathbf{x})$  локализовано вблизи начала координат, то есть если  $U(0, \mathbf{x})$  достаточно быстро спадает при росте  $|\mathbf{x}|$ , то  $U(t, \mathbf{x})$  обладает универсальной асимптотикой на больших временах. Чтобы установить эту асимптотику, мы рассмотрим времена  $t \gg l^2$ , где  $l$  – длина, на которой локализовано поле  $U(0, \mathbf{x})$ . Это означает, что интеграл (4.4) набирается в области  $|\mathbf{y}| \lesssim l$ . При этом условии можно пренебречь  $\mathbf{y}$  в экспоненте в (4.4). В результате мы заключаем, что при  $t \gg l^2$

$$U(t, \mathbf{x}) \approx \frac{A}{(4\pi t)^{d/2}} \exp[-\mathbf{x}^2/(4t)] \quad (4.5)$$

$$A = \int dy_1 \dots dy_d U(0, \mathbf{y}). \quad (4.6)$$

Отметим, что приближение (4.5) соответствует подстановке  $U(0, \mathbf{y}) \rightarrow A\delta(\mathbf{y})$ . Если для локализованного вблизи начала координат поля  $U(0, \mathbf{x})$  интеграл  $A$  (4.6) равен нулю, то асимптотика  $U(t, \mathbf{x})$  на больших временах будет иной. Раскладывая экспоненту в (4.4) по  $\mathbf{y}$ , мы находим следующий ведущий член разложения при  $A = 0$ :

$$U(t, \mathbf{x}) \approx \frac{\mathbf{B}\mathbf{x}}{(4\pi t)^{d/2+1}} \exp[-\mathbf{x}^2/(4t)] \quad (4.7)$$

$$\mathbf{B} = 2\pi \int dy_1 \dots dy_d \mathbf{y} U(0, \mathbf{y}). \quad (4.8)$$



Выражения (4.5,4.7) являются аналогами мультипольного разложения (поля точечного заряда и поля точечного диполя) в электростатике.

Подобная процедура, связанная с пространственным Фурье-преобразованием, может быть проделана и для уравнения Шрёдингера (4.2). В результате мы находим выражение

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(4\pi it)^{d/2}} \exp \left[ i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] \Psi(0, \mathbf{y}), \quad (4.9)$$

аналогичное (4.4). Однако имеется и существенное различие между выражениями (4.4) и (4.9). В то время как не существует интегрального представления, позволяющего восстановить  $U(0, \mathbf{x})$  по  $U(t, \mathbf{x})$ , выражение (4.9) допускает обращение по времени:

$$\Psi(0, \mathbf{x}) = \int \frac{dy_1 \dots dy_d}{(-4\pi it)^{d/2}} \exp \left[ -i \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] \Psi(t, \mathbf{y}).$$

Это связано с различным характером процессов, описываемых уравнениями (4.1) и (4.2). Уравнение диффузии (4.1) описывает диссипативный процесс, ведущий к размыванию со временем локализованных полей, смотри (4.5,4.7). Поэтому уравнение диффузии (4.1) не допускает обращения времени. Уравнение же Шрёдингера (4.2) обращение времени допускает: оно инвариантно относительно замены  $t \rightarrow -t$ ,  $\Psi \rightarrow \Psi^*$ . Поэтому наряду с прямым выражением (4.9) работает и обратное ему выражение.

Заметим, что для обоих уравнений (4.1,4.2) имеет место закон сохранения

$$\partial_t \int dx xU = 0, \quad \partial_t \int dx x\Psi = 0.$$

Эти соотношения проверяются непосредственно после вычисления производной по времени в соответствии с (4.1,4.2) и интегрирования по частям. Для уравнения диффузии приведённое соотношение означает, что стоит на месте центр тяжести облака диффундирующих частиц. Что касается уравнения Шрёдингера, то приведённое соотношение справедливо только в отсутствие внешнего потенциала, который приводит к появлению силы, действующей на частицу.

**Задача 4.1.** При  $t \rightarrow 0$  функция  $U(t, \mathbf{x})$  должна переходить в  $U(0, \mathbf{x})$ . Поэтому из соотношения (4.4) следует предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2}{4t} \right] = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Докажите это соотношение непосредственно.

**Задача 4.2.** Найдите решение одномерного диффузионного уравнения для следующего начального условия:  $U(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ . Сравните ответ с асимптотическим поведением (4.5).

**Задача 4.3.** Найдите асимптотическое поведение решения одномерного диффузионного уравнения для следующих начальных условий: 1)  $U(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ ; 2)  $U(0, x) = x \exp[-x^2/(2l^2)]$ ; 3)  $U(0, x) = \exp(-|x|/l)$ ; 4)  $U(0, x) = x \exp(-|x|/l)$ ; 5)  $U(0, x) = (x^2 + l^2)^{-1}$ ; 6)  $U(0, x) = x(x^2 + l^2)^{-2}$ .

**Задача 4.4.** Найдите для уравнения Шрёдингера асимптотические выражения, аналогичные (4.5,4.7).

**Задача 4.5.** Найдите решения одномерного уравнения Шрёдингера для следующих начальных условий:  $\Psi(0, x) = \exp[-x^2/(2l^2)]$ ;  $\Psi(0, x) = x \exp[-x^2/(2l^2)]$ .

**Задача 4.6.** Найдите аналог представления (4.4) для одномерного поля  $U(t, x)$ , динамика которого в Фурье-представлении задается (необратимым) уравнением  $\partial \tilde{U} / \partial t = -|q| \tilde{U}$ .

## 5. ДИНАМО

Эффект динамо заключается в нарастании со временем магнитного поля в потоке проводящей жидкости (электролита или плазмы). Рассмотрим это явление в случае малой амплитуды магнитного поля, когда обратным влиянием магнитного поля на гидродинамическое движение можно пренебречь. Тогда эволюцию магнитного поля можно изучать на фоне заданного гидродинамического движения, которое характеризуется полем скорости  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ .

В случае хорошо проводящей среды для описания эффекта динамо можно применять уравнение “замороженности” магнитного поля в проводящую жидкость

$$\partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{v}, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{B}$  – индукция магнитного поля. В уравнении (5.1) подразумевается условие несжимаемости жидкости  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . В этом случае условие бездивергентности  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  совместно с уравнением (5.1), так как из него следует “закон сохранения”

$$\partial_t (\text{div } \mathbf{B}) + (\mathbf{v} \nabla) (\text{div } \mathbf{B}) = 0.$$

Уравнение (5.1) содержит только первые производные и потому может быть решено методом характеристик, смотри раздел 18 А. Характеристики  $\mathbf{x}(t)$  определяются уравнением

$$\partial_t \mathbf{x} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}). \quad (5.2)$$

Эти характеристики называются Лагранжевыми траекториями, вдоль которых движутся частицы жидкости. Лагранжевы траектории можно параметризовать, скажем, начальным положением (при  $t = 0$ ) точки  $\mathbf{x}$ . Для стационарного потока Лагранжевы траектории называются также линиями тока. Вдоль данной характеристики магнитная индукция изменяется

в соответствии с уравнением

$$\frac{d}{dt}\mathbf{B} = \hat{\sigma}\mathbf{B}. \quad (5.3)$$

здесь  $\hat{\sigma}$  – матрица, составленная из производных компонент скорости  $\mathbf{v}$ :  $\hat{\sigma}\mathbf{B} \equiv (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{v}$ . Значения этих производных следует брать в точке  $\mathbf{r} = \mathbf{x}(t)$ . Можно сказать, что уравнение (5.3) определяет эволюцию магнитной индукции, которая “прикреплена” к данной точке жидкости.

Формальное решение уравнения (5.3) можно записать следующим образом

$$\mathbf{B}(t) = \hat{W}(t)\mathbf{B}(0), \quad (5.4)$$

где матрица  $\hat{W}$  удовлетворяет следующему уравнению и начальному условию

$$\frac{d}{dt}\hat{W} = \hat{\sigma}\hat{W}, \quad \hat{W}(0) = 1. \quad (5.5)$$

Здесь важно, что матрица  $\hat{W}$  определяется только свойствами потока и не зависит от магнитного поля. Вообще говоря, матрицы  $\hat{W}$  различны для разных Лагранжевых траекторий.

Интуитивно ясно, что матрица  $\hat{W}$  растет со временем, что ведет к росту магнитного поля  $\mathbf{B}$ . Продемонстрируем это на примере стационарного крупномасштабного движения, когда матрицу  $\hat{\sigma}$  можно считать не зависящей от времени и пространственных координат. Матрица  $\hat{\sigma}$  имеет три собственных значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ . Будем считать  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ . В силу условия несжимаемости  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  след матрицы  $\hat{\sigma}$  равен нулю, то есть  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ . Отсюда следует, что  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_3 < 0$ , а знак  $\lambda_2$  остается неопределенным. Если вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  разложить по собственным векторам матрицы  $\hat{\sigma}$ , то в силу (5.4,5.5) его компоненты будут зависеть от времени пропорционально  $e^{\lambda_1 t}$ ,  $e^{\lambda_2 t}$  и  $e^{\lambda_3 t}$ , соответственно. На больших временах главной будет первая компонента, которая экспоненциально растет со временем в силу  $\lambda_1 > 0$ . Даже если  $\lambda_2 > 0$  и вторая компонента тоже экспоненциально растет со временем, в силу  $\lambda_1 > \lambda_2$  первая компонента будет доминировать.

До сих пор мы рассматривали случай общего положения, когда собственные значения матрицы  $\hat{\sigma}$  отличны от нуля. В то же время в пристеночных областях обычно образуются сдвиговые течения, для которых все собственные значения матрицы  $\hat{\sigma}$  равны нулю. Этот случай требует специального анализа. Рассмотрим для определенности двумерное сдвиговое течение, которое реализуется вблизи стенки, которая задается условием  $y = 0$ , и имеет единственную компоненту скорости  $v_x = sy$ . В этом случае матрица  $\hat{\sigma}$  равна

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

то есть оба ее собственные значения равны нулю. Для этой матрицы решение уравнения (5.5) имеет вид

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 1 & st \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Обращаясь теперь к соотношению (5.4), мы заключаем, что магнитное поле растет со временем и в сдвиговом потоке, но не экспоненциально, а гораздо медленнее – как первая степень времени.

Эффект, подобный динамо, наблюдается в полимерных растворах. В этом случае можно ввести аналог магнитного поля  $\mathbf{B}$ , смысл которого заключается в том, что его величина определяет степень растяжения полимерных молекул, а направление определяет направление этого растяжения. Тогда (не для слишком сильных растяжений) динамика поля  $\mathbf{B}$  описывается уравнением, подобным (5.1)

$$\partial_t \mathbf{B} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{B} = (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{v} - \gamma\mathbf{B}. \quad (5.8)$$

Разница заключается в последнем члене, который описывает релаксацию растяжения полимеров ( $\gamma^{-1}$  – время релаксации).

Следуя той же логике, что и раньше, мы приходим к выводу, что в стационарном крупномасштабном течении компоненты поля  $\mathbf{B}$  вдоль Лагранжевых траекторий меняются пропорционально  $e^{(\lambda_1 - \gamma)t}$ ,  $e^{(\lambda_2 - \gamma)t}$  и  $e^{(\lambda_3 - \gamma)t}$ . Таким образом, мы приходим к выводу, что при  $\lambda_1 > \gamma$  полимеры растягиваются, а при обратном соотношении – нет. (В частности, полимеры не растягиваются в сдвиговых потоках.) Это приводит к сильному эффекту даже в слабых полимерных растворах. В них полимеры в нерастянутом состоянии практически не оказывают влияния на свойства раствора. Но если создать в растворе достаточно сильное течение, так что  $\lambda_1$  превзойдет  $\gamma$ , то полимеры сильно растянутся, и свойства раствора существенно изменятся: в нем начнут проявляться упругие эффекты.

**Задача 5.1.** *Найти, как будет меняться со временем магнитное поле в двумерном стационарном сдвиговом потоке с матрицей производных скорости (5.6), если в начальный момент времени  $B_x = -y \exp(-x^2 - y^2)$ ,  $B_y = x \exp(-x^2 - y^2)$ .*

## 6. КВАНТОВЫЕ ВИХРИ

Как известно, в сверхтекучей жидкости конечное число атомов находится в когерентном состоянии, за счет которого осуществляется сверхтекучее движение. В сверхтекучем гелии-4 сверхтекучая скорость  $\mathbf{v}$  следующим образом связана с фазой  $\phi$  этого когерентного состояния

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \phi, \quad (6.1)$$

где  $m$  – масса атома гелия. В дальнейшем мы используем систему единиц, в которой  $\hbar/m = 1$ .

Как следует из соотношения (6.1), сверхтекучая скорость является потенциальной. Однако в сверхтекучей жидкости имеются линейные дефекты, которые называются вихрями, вблизи линий которых когерентное состояние разрушено (на атомных масштабах). При обходе вокруг такой линии фаза  $\phi$  может меняться на  $2\pi$ , то есть для любого контура, охватывающего линию вихря

$$\oint d\mathbf{r} \mathbf{v} = \pm 2\pi. \quad (6.2)$$

Вообще говоря, в правой части (6.2) может стоять  $2\pi n$ , где  $n$  – целое число. Но вихри с  $|n| > 1$  оказываются неустойчивыми, разваливаясь на “элементарные” вихри с  $n = \pm 1$ , поскольку этот процесс энергетически выгоден (сопровождается выделением энергии). Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем только случай (6.2).

Для прямолинейного вихря, направленного вдоль оси  $Z$ , сверхтекучая скорость может быть записана в виде

$$v_x = \mp \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \pm \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v_z = 0, \quad (6.3)$$

где знаки соответствуют вращению против часовой стрелки и по часовой стрелке, соответственно. Зависимость (6.3) связана с симметрией задачи: линии тока являются окружностями с осью  $Z$  в качестве оси симметрии. Условие же (6.2) обеспечивается тем, что скорость вращения убывает обратно пропорционально расстоянию до вихревой линии (в данном случае до оси  $Z$ ).

Скорость (6.3) имеет особенность на самой оси  $Z$ , где она обращается в бесконечность и на которой сосредоточена ненулевая завихренность. Нетрудно сообразить, что для скорости (6.3)

$$\text{rot } \mathbf{v} = \pm 2\pi \mathbf{n}_z \delta(x)\delta(y), \quad (6.4)$$

где  $\mathbf{n}_z$  – единичный вектор, направленный вдоль оси  $Z$ . Действительно, в силу теоремы Стокса именно при таком соотношении выполняется условие (6.2) для любого контура, охватывающего вихрь. Конечно, в реальности выражение (6.3) работает только до расстояний порядка атомного до оси  $Z$ , соответственно,  $\delta$ -функции в (6.4) “размазаны” на том же масштабе. Это, однако, не мешает дальнейшим формальным действиям, в которых атомный масштаб предполагается пренебрежимо малым.

Соотношение (6.4) допускает обобщение на вихрь произвольной формы и на произвольную систему вихрей. Оно имеет вид

$$\text{rot } \mathbf{v} = 2\pi \mathbf{n} \delta_v^{(2)}(\mathbf{r}), \quad (6.5)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, направленный вдоль вихревой линии, а  $\delta_v^{(2)}(\mathbf{r})$  – “двумерная”  $\delta$ -функция, отличная от нуля только на вихревой линии. Она определяется тем, что равен единице интеграл от  $\delta^{(2)}(\mathbf{r})$  по

любой поверхности, пересекающей вихревую линию и перпендикулярной ей в точке пересечения. Одно же из двух возможных направлений единичного вектора  $\mathbf{n}$  определяется направлением, в котором закручен вихрь. При наличии нескольких вихрей в правой части (6.5) должна стоять сумма по вихрям.

Соотношение (6.5) позволяет однозначно восстановить сверхтекучую скорость по форме вихрей, если в дополнение к соотношению (6.5) использовать условие несжимаемости  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . (Напомним, что жидкость можно считать несжимаемой, если мы на некотором масштабе рассматриваем движения более медленные, чем звуковые колебания с длиной волны порядка этого масштаба.) Тогда задача формально сводится к магнитостатике, причем сверхтекучая скорость  $\mathbf{v}$  играет роль магнитного поля, а вихри в соответствии с соотношением (6.5) играют роль тонких проволок, по которым течет ток. Специфика сверхтекучей жидкости заключается в том, что этот ток квантуется (имеет определенное значение). Магнитостатическая аналогия позволяет выписать решение уравнения (6.5), используя формулу Био-Савара-Лапласа

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int ds [\mathbf{n} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta})] |\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}|^{-3}. \quad (6.6)$$

Здесь интегрирование идет вдоль вихревой линии, причем  $ds$  – дифференциал ее длины,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, касательный к вихревой линии, а  $\boldsymbol{\zeta}(s)$  задает положение вихревой линии в пространстве. При наличии нескольких вихрей сверхтекучая скорость является суммой величин (6.6), взятых для каждого вихря, что объясняется линейностью соотношения (6.5).

Выражение (6.6) предполагает, что мы рассматриваем неограниченное пространство, причем вихри сосредоточены в его ограниченной области, вне которой сверхтекучая скорость  $\mathbf{v}$  убывает. При решении задачи в ограниченном объеме к выражению (6.6) следует добавить чисто потенциальный вклад  $\nabla\phi$ , потенциал которого в силу условия несжимаемости  $\text{div } \mathbf{v} = 0$  удовлетворяет уравнению Лапласа  $\nabla^2\phi = 0$ . Потенциал  $\phi$  должен быть выбран так, чтобы удовлетворить граничным условиям на границе области, в которой рассматривается сверхтекучее движение. Например, на твердой поверхности должна быть равна нулю перпендикулярная к поверхности компонента сверхтекучей скорости (что означает нулевой сверхтекучий поток через стенку).

Вихревые линии могут быть замкнутыми. Единичный замкнутый вихрь постепенно релаксирует к форме правильной окружности. Такой круговой вихрь (вихревое кольцо), в отличие от прямого, движется. Чтобы найти скорость его движения, вычислим скорость, которая индуцируется в некоторой точке вихревой линии. Для этого воспользуемся общей формулой (6.6). Будем считать, что вихрь радиуса  $R$  лежит в плоскости  $X - Y$ , а его центр совпадает с началом координат. Вычислим скорость в точке  $R, 0, 0$ . Тогда в

интеграле (6.6)  $ds = R d\varphi$ , где  $\varphi$  – полярный угол, при этом  $|\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta}| = 2R \sin(\varphi/2)$  и  $|\mathbf{n} \times (\mathbf{r} - \boldsymbol{\zeta})| = 2R \sin^2(\varphi/2)$ . Несложно сообразить, что отлична от нуля только компонента скорости  $v_z$ , которая дается интегралом

$$v_z = \frac{1}{8R} \int \frac{d\varphi}{\sin(\varphi/2)} \approx \frac{1}{2R} \ln \left( \frac{R}{a} \right). \quad (6.7)$$

Интегрирование в (6.7) должно идти по углу  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$ , что формально приводит к расходимостям на обоих пределах. Следует, однако, помнить, что рассматриваемое приближение работает на масштабах больше атомного размера  $a$ , поэтому область интегрирования следует ограничить до  $a/R < \varphi < 2\pi - a/R$ . В результате получается ответ (6.7), в котором считается, что  $\ln(R/a)$  является большой величиной. Очевидно, что все точки вихревой линии движутся вдоль оси  $Z$  с одинаковой скоростью. Обобщая, вихревое кольцо движется, как целое, в направлении, перпендикулярном его плоскости, со скоростью (6.7), которая определяется его радиусом.

До сих пор мы считали, что никаких внешних воздействий на квантовые вихри нет. В то же время при конечной температуре возникает сила воздействия на вихрь, связанная с тем, что его стремится увлечь так называемое нормальное движение жидкости. В результате возникает действующая на вихрь сила, которая пропорциональна разности скорости нормального движения (нормальной скорости) и скорости движения вихря. Определим, как в такой ситуации будет двигаться вихрь. Для этого мы исходим из общего уравнения сверхтекучего движения

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}, \quad (6.8)$$

где  $\mathbf{f}$  – сила на единицу массы, приложенная к сверхтекучей компоненте. Эта сила вызывается, например, градиентом давления.

Рассмотрим для определенности прямолинейный вихрь, вихревая линия которого совпадает с осью  $Z$ . В отсутствие внешних воздействий связанная с ним сверхтекучая скорость дается выражениями (6.3), поэтому в соответствии с (6.8)  $\mathbf{f} = -(x^2 + y^2)^{-2}(x, y, 0)$ , то есть сила  $\mathbf{f}$  направлена к вихревой линии, а градиент давления, наоборот, направлен от вихревой линии. Теперь мы предположим, что на вихрь действует сила  $F$  на единицу длины, направленная вдоль оси  $Y$ . Тогда вихрь будет двигаться вдоль оси  $X$  с некоторой скоростью  $V$ , которая подлежит определению. Движение со скоростью  $V$  означает, что в выражениях (6.3) мы должны подставить  $x \rightarrow \tilde{x} = x - Vt$ . Тогда уравнение (6.8) приводит к соотношению

$$-V \partial_x \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f},$$

Здесь сила  $\mathbf{f}$ , помимо градиентной объемной части, содержит также силу, сосредоточенную на линии вихря, что можно записать, как вклад  $f_y^{sing} = F \delta(\tilde{x}) \delta(y)$ . Чтобы связать  $V$  и  $F$ , возьмем ротор от приведенного

соотношения, что дает для  $z$ -компоненты ротора

$$-V \partial_x (\text{rot } \mathbf{v})_z = F \partial_x \delta(\tilde{x}) \delta(y).$$

Воспользовавшись теперь выражением (6.4), находим окончательно  $F = \mp 2\pi V$ . В инвариантном виде

$$\mathbf{F} = 2\pi(\mathbf{n} \times \mathbf{V}). \quad (6.9)$$

Это так называемая сила Магнуса.

Приведенная схема прямо обобщается на вихрь произвольной формы. Если на вихрь в данной точке действует сила  $\mathbf{F}$  на единицу длины (перпендикулярная  $\mathbf{n}$ ), то она приводит к скорости движения  $\mathbf{V} = -(2\pi)^{-1}(\mathbf{n} \times \mathbf{F})$ . Эту скорость надо прибавить к сверхтекучей скорости  $\mathbf{v}$  в той же точке, что дает скорость движения вихревой линии. Напомним, что сверхтекучая скорость  $\mathbf{v}$  определяется суммой скорости, индуцированной вихрями и скорости потенциального движения, связанного с граничными условиями.

**Задача 6.1.** Получить выражение (6.3) для сверхтекучей скорости прямолинейного вихря из общей формулы (6.5).

**Задача 6.2.** Найти сверхтекучую скорость на оси кругового вихря радиуса  $R$ .

**Задача 6.3.** Как будут двигаться два прямых параллельных вихря, разделенных расстоянием  $R$ ? Рассмотреть два случая: когда вихри закручены в одну или в противоположные стороны.

**Задача 6.4.** Найти эволюцию вихревого кольца, на который действует постоянная сила  $F$  на единицу длины в направлении, перпендикулярном плоскости кольца.

## 7. УРАВНЕНИЯ НА МЕДЛЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

В различных физических контекстах встречаются задачи, содержащие один или несколько малых параметров. В дальнейшем мы будем рассматривать случай, когда в задаче имеется один малый параметр, который мы обозначаем  $\epsilon$ . Особенно интересен случай, когда решение задачи при  $\epsilon = 0$  известно. Тогда решение исходной задачи можно строить в виде явного разложения по малому параметру  $\epsilon$ , такое разложение называется теорией возмущений. Нас будет интересовать случай динамических систем, описываемых эволюционными дифференциальными уравнениями.

Однако в ряде случаев, связанных с разного рода резонансами, область применимости прямой теории возмущений оказывается ограниченной по времени, что связано с появлением секулярных (то есть растущих со временем) членов в решении. Другими словами, точность разложения решения по  $\epsilon$  падает с ростом времени  $t$ . Чтобы повысить эту точность,

следует модифицировать прямую теорию возмущений. Этой модификации, которая известна, как метод усреднения Боголюбова-Крылова, и посвящен настоящий раздел.

Рассмотрим в качестве базисного примера возмущенное уравнение осциллятора

$$\partial_t^2 x + \nu^2 x = \nu^2 f(x, \dot{x}), \quad (7.1)$$

где параметры решения предполагаются такими, что  $f \ll x$ , то есть  $f/x$  – малый параметр. При  $f = 0$  мы имеем дело с уравнением линейного осциллятора, который имеет известное решение  $x = J \cos(\theta + \nu t)$ , где  $J$  и  $\theta$  – произвольные постоянные. В пространстве  $x, \dot{x}$  соответствующая кривая является замкнутой (представляя собой эллипс). Такого рода поведение называют предельным циклом. В силу произвольности  $J$  и  $\theta$  ситуация является вырожденной. Возмущение, как правило, снимает это вырождение, приводя к конечному числу устойчивых или неустойчивых предельных циклов.

Решение невозмущенного уравнения  $x = J \cos(\theta + \nu t)$  подсказывает нам способ исследования возмущенного уравнения. А именно, мы ищем решение возмущенного уравнения в том же виде  $x = J \cos(\theta + \nu t)$ , но теперь  $J$  и  $\theta$  становятся функциями времени. При малых  $f/x \ll 1$  эти функции слабо зависят от времени. Точнее, мы будем считать, что  $J$  и  $\theta$  мало меняются на периоде  $2\pi/\nu$ , что означает выполнение неравенств  $\nu^{-1}\dot{J} \ll J$ ,  $\nu^{-1}\dot{\theta} \ll 1$ , справедливых в силу малости  $f/x$ . В этом случае уравнения на  $J$  и  $\theta$  можно найти по теории возмущений по  $\epsilon$ . Секулярные члены в этих уравнениях отсутствуют.

Подставляя выражение  $x = J \cos(\theta + \nu t)$  в уравнение (7.1), находим

$$\begin{aligned} & \partial_t^2 J \cos(\theta + \nu t) - J \partial_t^2 \theta \sin(\theta + \nu t) \\ & - 2\nu \dot{J} \sin(\theta + \nu t) - 2\nu \dot{\theta} J \cos(\theta + \nu t) \\ & = \nu^2 f[J \cos(\theta + \nu t), -\nu J \sin(\theta + \nu t)]. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Мы заключаем, что  $\dot{J}$  и  $\dot{\theta}$  пропорциональны  $f$ . Это позволило нам отбросить квадратичные по  $\dot{J}$  и  $\dot{\theta}$  члены в левой части (7.2) и пренебречь членами с  $\dot{J}$ ,  $\dot{\theta}$  в правой части (7.2). Другими словами, уравнение (7.2) написано с точностью до первого порядка по  $f$ .

Правая часть уравнения (7.2) может быть разложена в ряд Фурье по  $\cos(\theta + \nu t)$ ,  $\sin(\theta + \nu t)$ . Следовательно, и  $J, \theta$  также раскладывается в ряд Фурье

$$\begin{aligned} J &= A + \sum_{n=1} [J_{1n} \cos(\theta + n\nu t) + J_{2n} \sin(\theta + n\nu t)], \\ \theta &= \Theta + \sum_{n=1} [\theta_{1n} \cos(\theta + n\nu t) + \theta_{2n} \sin(\theta + n\nu t)]. \end{aligned}$$

Чтобы найти коэффициенты в этом разложении, его следует подставить в уравнение (7.2).

При дифференцировании рядов для  $J, \theta$  в нашем приближении можно ограничиться приближением, когда  $J_{1n}, J_{2n}, \theta_{1n}, \theta_{2n}$  не дифференцируются и

$\partial_t \cos(\theta + \nu t) \rightarrow -\nu \sin(\theta + \nu t)$ ,  $\partial_t \sin(\theta + \nu t) \rightarrow \nu \cos(\theta + \nu t)$ , поскольку отброшенные члены малы в меру малости производных от  $J, \theta$ . Тогда левые части уравнений на коэффициенты  $J_{1n}, J_{2n}, \theta_{1n}, \theta_{2n}$ , следующие из (7.2), равны некоторым факторам, умноженным на  $J_{1n}, J_{2n}, \theta_{1n}, \theta_{2n}$ . Отсюда мы заключаем, что коэффициенты  $J_{1n}, J_{2n}, \theta_{1n}, \theta_{2n}$  всегда остаются малыми в силу малости  $f$ , поскольку  $f$  пропорциональна правой части (7.2). В то же время изменения  $A$  и  $\Theta$  могут накапливаться за большое время, так как в уравнения на них входят только производные  $\partial_t A$  и  $\partial_t \Theta$ , но не сами  $A$  и  $\Theta$ . Поэтому в дальнейшем мы будем интересоваться только вкладом в  $x$ , связанными с  $A$  и  $\Theta$ .

Поскольку  $J_{1n}, J_{2n}, \theta_{1n}, \theta_{2n}$  всегда остаются малыми, мы отбрасываем эти члены в  $x$ , ограничиваясь приближением  $x = A \cos(\phi)$ , где  $\phi = \Theta + \nu t$ . Далее, в разложении  $J$  и  $\theta$  в ряд Фурье отсутствуют осциллирующие множители при  $A$  и  $\Theta$ , поэтому при выводе уравнений на них можно пренебречь  $\partial_t^2 A$  и  $\partial_t^2 \Theta$  (по сравнению с  $\nu \partial_t A$  и  $\nu \partial_t \Theta$ ). Члены с  $A, \Theta$  левой части (7.2) определяют первую Фурье-гармонику. Выделяя в правой части этого уравнения первую гармонику и приравнявая коэффициенты в правой и левой частях, находим уравнения

$$\dot{A} = -\frac{\epsilon}{2\pi\nu} \int_0^{2\pi} d\phi f(A \cos \phi, -A\nu \sin \phi) \sin \phi, \quad (7.3)$$

$$\dot{\Theta} = -\frac{\epsilon}{2\pi A\nu} \int_0^{2\pi} d\phi f(A \cos \phi, -A\nu \sin \phi) \cos \phi, \quad (7.4)$$

которые определяют эволюцию  $A$  и  $\Theta$ .

Уравнения (7.3,7.4) позволяют исследовать динамику системы на временах, намного превышающих период  $\nu^{-1}$ . Эти уравнения выписаны в первом порядке по возмущению  $f$ . При необходимости они могут быть уточнены, что приводит к довольно громоздким выражениям. Продемонстрируем на нескольких примерах, как работает эта схема.

Рассмотрим нелинейную задачу:

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \nu^2 \mu x^3, \quad (7.5)$$

где  $\mu$  – некоторый коэффициент. Найдем ее приближительное решение  $x = A \cos(\Theta + \nu t)$  при условии  $\mu A^2 \ll 1$ , которое является условием применимости схемы Боголюбова-Крылова. Вычисляя интегралы в правой части (7.3,7.4), находим

$$\dot{A} = 0, \quad \dot{\Theta} = -3\mu\nu A^2/8. \quad (7.6)$$

Таким образом, амплитуда  $A$  со временем не меняется. Это связано с тем, что уравнение (7.5) консервативно, то есть является уравнением Ньютона для движения частицы в потенциале  $\nu^2(x^2/2 - \mu x^4/4)$ , и потому приводит к закону сохранения энергии, который фиксирует амплитуду колебаний. Что касается члена  $\Theta$ , то его можно интерпретировать, как добавку  $-3\nu\mu A^2/8$  к частоте колебаний  $\nu$  (при  $\mu > 0$  этот

сдвиг отрицателен, то есть частота уменьшается по сравнению с линейной задачей). Это явление называется нелинейным сдвигом частоты.

**Задача 7.1.** *Найти нелинейный сдвиг частоты физического маятника, подчиняющегося уравнению*

$$l\ddot{\alpha} + g \sin \alpha = 0,$$

*и колеблющегося с малой амплитудой  $A$ .*

Рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \epsilon \nu (1 - x^2) \dot{x}, \quad (7.7)$$

где  $\epsilon \ll 1$ . Оно уже не является консервативным. Вычисляя интеграл (7.3), находим уравнение для амплитуды

$$\partial_t A = \frac{\epsilon \nu}{2} A(1 - A^2/4).$$

Это уравнение имеет три стационарные точки:  $A = 0$ ,  $A = \pm 2$ . При  $\epsilon > 0$  первая стационарная точка является неустойчивой, а две остальные являются устойчивыми. Устойчивая стационарная точка соответствует устойчивому предельному циклу в исходном уравнении (7.7).

**Задача 7.2.** *Найти и исследовать на устойчивость предельный цикл уравнения*

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \epsilon \nu (1 - |x|) \dot{x}, \quad \epsilon \ll 1.$$

**Задача 7.3.** *Найти закон зависимости затухания амплитуды колебаний осциллятора от времени с малым квадратичным затуханием:*

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\epsilon \dot{x}^2 \text{sign}(\dot{x}),$$

$$\epsilon A \ll 1.$$

Переходим теперь к неавтономным системам, когда функция  $f$  в правой части (7.1) явно зависит от времени. Если эта зависимость слабая, то мы по-прежнему можем пользоваться приближением (7.3,7.4). Рассмотрим теперь другой случай, а именно случай параметрического резонанса, когда  $f$  содержит удвоенную частоту  $2\nu$ . В этом случае по-прежнему работает схема усреднения Боголюбова-Крылова, но фаза  $\Theta$  явно входит в игру. Сохраняя определение  $\phi = \Theta + \nu t$ , мы должны выражать через  $\phi$  функцию  $f(t)$ .

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\epsilon \nu^2 \cos(2\nu t)x, \quad (7.8)$$

которое описывает классический параметрический резонанс. Проанализируем решение (7.8), предполагая

малость  $\epsilon$ , то есть  $\epsilon \ll 1$ . В этом случае модифицированные уравнения (7.3,7.4) дают

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \epsilon A \nu \int \frac{d\phi}{2\pi} \cos(2\phi - 2\Theta) \cos(\phi) \sin(\phi) \\ &= \frac{\nu \epsilon A}{4} \sin(2\Theta), \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\dot{\Theta} = \epsilon \nu \int \frac{d\phi}{2\pi} \cos(2\phi - 2\Theta) \cos^2(\phi) = \frac{\epsilon \nu}{4} \cos(2\Theta). \quad (7.10)$$

Легко проверить, что система уравнений (7.9,7.10) приводит к уравнению

$$\partial_t^2 (A^2) = \frac{(\nu \epsilon)^2}{4} A^2. \quad (7.11)$$

Таким образом,  $A^2$  представляется суммой растущей и убывающей экспонент. Система уравнений (7.9,7.10) приводит также к закону сохранения

$$A^2 \cos(2\Theta) = \text{const.}$$

Поэтому  $A^2$  не может неограниченно убывать со временем, то есть коэффициент при возрастающей экспоненте в  $A^2$  отличен от нуля. Мы приходим к выводу, что на больших временах  $A \propto \exp(\nu \epsilon t/4)$ . Таким образом, параметрический резонанс приводит к экспоненциальному росту амплитуды колебаний.

**Задача 7.4.** *Найти решение уравнения*

$$\ddot{x} + \nu^2 x = -\nu^2 \mu \cos(2\nu t)x^3, \quad (7.12)$$

*считая  $\mu A^2$  малой величиной.*

## 8. ГАММА-ФУНКЦИЯ ЭЙЛЕРА

На практике довольно часто возникают случаи, когда требуется взять интеграл, содержащий комбинацию экспоненциальной и степенной функций. Такого сорта интегралы сводятся к так называемой Гамма-функции  $\Gamma(x)$ , которая была введена Эйлером еще в 18 веке. Гамма-функция определяется следующим интегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}. \quad (8.1)$$

Интеграл (8.1) сходится при любом положительном  $z$ , или, если речь идет о функции комплексной переменной, при любом  $z$  с положительной действительной частью. Интеграл (8.1) легко вычисляется путем многократного интегрирования по частям при целом положительном  $z = n$ . В этом случае получается  $\Gamma(n) = (n-1)!$ . Поэтому можно сказать, что Гамма-функция является обобщением факториала на случай произвольного комплексного  $n$ . Отметим также значение  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ , которое может быть получено из

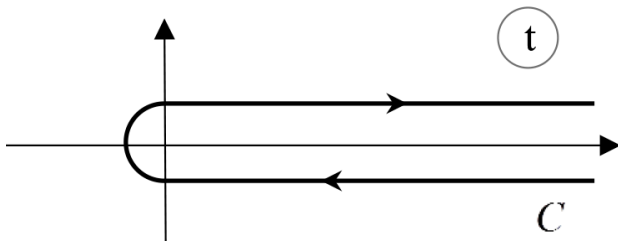


Рис. 2. Контур интегрирования в интегральном представлении гамма-функции

(8.1), если перейти к интегрированию по  $\sqrt{t}$ . Однократное интегрирование по частям в выражении (8.1) дает соотношение

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad (8.2)$$

которое также является обобщением соответствующего свойства факториала.

При  $z \rightarrow 0$  значение интеграла (8.1) неограниченно возрастает. Это означает, что при  $z = 0$  функция  $\Gamma(z)$  имеет особенность. Чтобы установить характер этой особенности и, более общо, продолжить аналитически  $\Gamma(z)$  на  $z$  с отрицательной действительной частью, можно использовать модификацию интеграла (8.1)

$$\Gamma(z) = \frac{1}{1 - \exp(2\pi iz)} \int_C dt t^{z-1} e^{-t}, \quad (8.3)$$

где контур  $C$  изображен на рисунке 2.

В выражении (8.3) предполагается, что  $t^z$  задано ветвью с разрезом вдоль действительной оси, причем на верхнем берегу разреза аргумент  $t^z$  равен нулю (то есть  $t^z$  действительно), а контур  $C$  обходит этот разрез, приходя из  $+\infty$  снизу разреза и уходя в  $+\infty$  сверху разреза. Если  $\operatorname{Re} z > 0$ , то контурный интеграл (8.3) может быть сведен к сумме интегралов по верхнему и нижнему берегам разреза, причем интеграл по верхнему берегу разреза совпадает с интегралом (8.1), а интеграл по верхнему берегу разреза отличается от интеграла (8.1) множителем  $-\exp(2\pi iz)$ . Отсюда и получается выражение (8.3).

Правая часть соотношения (8.3) определена и для  $z$  с отрицательной действительной частью, то есть осуществляет аналитическое продолжение  $\Gamma(z)$  на эту область переменной  $z$ . Контурный интеграл в (8.3) не имеет особенностей в плоскости  $z$ . Следовательно, особенности функции  $\Gamma(z)$  определяются разностью  $1 - \exp(2\pi iz)$ , которая обращается в ноль при целых (как положительных, так и отрицательных)  $z$ . При положительных целых  $z$  в ноль обращается также и контурный интеграл, то есть мы приходим к неопределенности, которая должна раскрываться по правилу Лопиталья. В любом случае,  $\Gamma(z)$  не имеет особенностей при целых положительных  $z$ , в соответствии с приведенным выше анализом. При целых отрицательных  $z$  контурный интеграл в ноль не обращается,

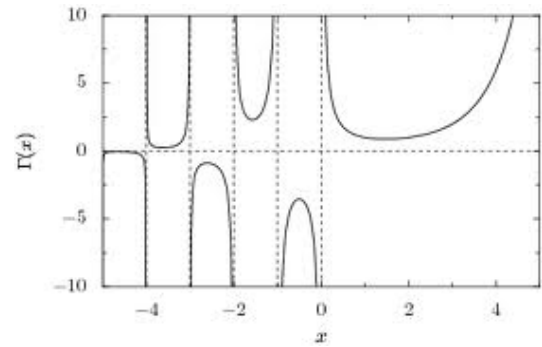


Рис. 3. Гамма-функция Эйлера.

и мы приходим к выводу, что в этих точках  $\Gamma(z)$  имеет простые полюсы.

Найдем вычеты функции  $\Gamma(z)$  в полюсах  $z = 0, -1, -2, \dots$ . При  $z = -n$  ( $n$  — целое неотрицательное) контурный интеграл в (8.3) сводится к вычету в нуле, поскольку значения подынтегральной функции на берегах разреза совпадают между собой. Вычисляя этот вычет, находим

$$\int_C dt t^{-n-1} e^{-t} = -2\pi i (-1)^n (n!)^{-1}.$$

Таким образом

$$\operatorname{res} \Gamma(-n) = (-1)^n (n!)^{-1}. \quad (8.4)$$

График зависимости Гамма-функции от своего (действительного) аргумента приведен на рисунке 3. В точках  $x = -n$  функция  $\Gamma$  стремится к бесконечности.

Можно найти асимптотическое выражение Гамма-функции  $\Gamma(z)$  при больших положительных значениях  $z$ , воспользовавшись методом перевала, смотри раздел 18 В. Для этого в интеграле (8.1) произведем замену  $t \rightarrow tz$ , которая приводит его к виду

$$\Gamma(z) = z^z \int_0^\infty \frac{dt}{t} \exp[z(\ln t - t)],$$

то есть к виду (18.4). Стоящая в экспоненте функция  $\ln t - t$  достигает максимума в точке  $t = 1$ . Используя теперь приближение (18.5), находим

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z \exp(-z). \quad (8.5)$$

Это соотношение дает приближенное (работающее при больших  $n$ ) выражение для факториала  $n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ , которое называется формулой Стирлинга. Отметим, что асимптотика (8.5) справедлива и для комплексных  $z$  при условии большого положительного значения действительной части  $z$ .

Через Гамма-функции выражается так называемый интеграл Эйлера первого рода:

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (8.6)$$

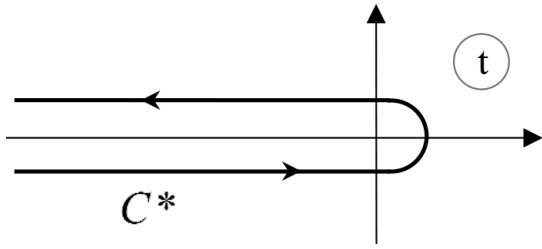


Рис. 4. Контур интегрирования вдоль отрицательной полуоси.

где действительные части  $\alpha$  и  $\beta$  предполагаются положительными. Для доказательства соотношения (8.6) рассмотрим немного более общий интеграл

$$s^{\alpha+\beta-1}B(\alpha, \beta) = \int_0^s dx x^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1}.$$

Интегрируя обе части этого соотношения по  $s$  с весом  $e^{-s}$ , мы получаем

$$\Gamma(\alpha + \beta)B(\alpha, \beta) = \int_0^\infty ds e^{-s} \int_0^s dx x^{\alpha-1}(s-x)^{\beta-1}.$$

Замена переменных  $s = x + y$  сводит правую часть к произведению интегралов по  $x$  по  $y$ , которые дают произведение  $\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)$ . Таким образом, мы приходим к соотношению (8.6).

Докажем соотношение

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}. \quad (8.7)$$

Для этого запишем левую часть (8.7), как произведение интегралов

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{-z} e^{-t} \int_0^\infty ds s^{z-1} e^{-s}.$$

Произведя здесь замену  $s = t\zeta$  и взяв интеграл по  $t$ , мы находим

$$\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta}.$$

Взятие интеграла по  $\zeta$  (смотри задачу) приводит к соотношению (8.7). Строго говоря, приведенные рассуждения справедливы для  $0 < \operatorname{Re} z < 1$ . Однако принцип аналитического продолжения позволяет распространить его на произвольные  $z$ . В частности, соотношение (8.7) позволяет легко воспроизвести выражение для вычетов (8.4).

Используя соотношение (8.7) запишем

$$\begin{aligned} \Gamma^{-1}(z) &= \frac{\sin \pi z}{\pi} \Gamma(1-z) = \\ &= \frac{\exp(i\pi z) - \exp(-i\pi z)}{2\pi i} \Gamma(1-z) \end{aligned}$$

Выразив затем  $\Gamma(1-z)$  через интегральное представление (8.3), получим

$$\Gamma^{-1}(z) = \frac{\exp(i\pi z)}{2\pi i} \int_C dt t^{-z} e^{-t},$$

где контур  $C$  изображен на рисунке 2. Делая замену переменных  $t \rightarrow -t$ , найдем, что

$$\Gamma^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^*} dt t^{-z} e^t, \quad (8.8)$$

где контур  $C^*$  изображен на рисунке 4. Он охватывает разрез функции  $t^{-z}$ , идущий вдоль отрицательной полуоси.

Делая в интеграле (8.2) замену  $t = \beta u$ , находим

$$\int_0^\infty du u^{z-1} \exp(-\beta u) = \beta^{-z} \Gamma(z).$$

В частности, подставляя  $\beta = \epsilon + i$  (где  $\epsilon \ll 1$ ), находим

$$\int_0^\infty du u^{z-1} \exp(-\epsilon u - iu) = \exp(-\pi iz/2) \Gamma(z).$$

Предполагая, что  $z$  действительно, и беря действительную и мнимую части этого соотношения, находим

$$\int_0^\infty du u^{z-1} e^{-\epsilon u} \cos(u) = \cos(\pi z/2) \Gamma(z), \quad (8.9)$$

$$\int_0^\infty du u^{z-1} e^{-\epsilon u} \sin(u) = \sin(\pi z/2) \Gamma(z). \quad (8.10)$$

**Задача 8.1.** Проверить, что при целых положительных  $z$  раскрытие неопределенности по правилу Лопиталья в выражении (8.3) дает  $\Gamma(n) = (n-1)!$

**Задача 8.2.** Найдти интеграл

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^a \varphi \sin^b \varphi.$$

**Задача 8.3.** Доказать, что

$$\int_0^\infty d\zeta \frac{\zeta^{z-1}}{1+\zeta} = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Указание: переписать интеграл, как контурный, где контур идет по берегам разреза функции  $\zeta^z$ , а затем деформировать контур интегрирования, “посадив” интеграл на вычет в точке  $\zeta = -1$ .

**Задача 8.4.** Вычислить интеграл

$$\int_0^1 dz \ln \Gamma(z).$$

**Задача 8.5.** Доказать соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(z+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z).$$

**Задача 8.6.** Найдти  $|\Gamma(1/2+ix)|$ , где  $x$  действительное число.



## 9. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Функции Бесселя удивительным образом возникают в самых различных задачах математической физики. Они естественным образом возникают в задачах теории поля, когда речь идет о зависящих от двух координат решениях уравнения типа Гельмгольца

$$(\Delta + \kappa^2) f = 0, \quad (9.1)$$

описывающего, например, различные электромагнитные и акустические явления. Однако область применимости функций Бесселя отнюдь не ограничивается этими проблемами, они оказываются полезными в очень широком круге приложений, чем и определяется важность этих функций.

Решение уравнения (9.1) можно разложить по плоским волнам, зависимость поля от координат в плоской волне определяется фактором  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{k}$  – волновой вектор, а  $\mathbf{r} = (x, y)$  – радиус-вектор. Однако часто удобным бывает решать задачи в полярной системе координат  $r, \varphi$ , где  $r$  – расстояние от начала отсчета до точки наблюдения, а  $\varphi$  – полярный угол. При соответствующем выборе начала отсчета полярного угла  $\varphi$  скалярное произведение  $\mathbf{k}\mathbf{r} = rk \sin \varphi$ .

Функции Бесселя являются коэффициентами разложения  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  в ряд по угловым гармоникам:

$$\exp(iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(z) \exp(in\varphi), \quad (9.2)$$

где  $z = kr$ . Графики нескольких первых функций Бесселя приведены на рисунке 5. Добавляя  $\pi$  к  $\varphi$ , находим

$$\exp(-iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n J_n(z) \exp(in\varphi).$$

Сравнивая это выражение с прямым разложением

$$\exp(-iz \sin \varphi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_{-n}(z) \exp(in\varphi),$$

мы заключаем, что  $J_{-n} = (-1)^n J_n$ . Подставляя в выражение (9.2)  $t = e^{i\varphi}$ , находим ряд Лорана по  $t$

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - 1/t\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) t^n. \quad (9.3)$$

Здесь  $t$  может быть произвольным комплексным числом.

**Задача 9.1.** Получить соотношение

$$\int dr r J_n(kr) J_n(qr) = k^{-1} \delta(k - q).$$

Указание: воспользоваться соотношением (9.2) и Фурье-представлением двумерной  $\delta$ -функции.

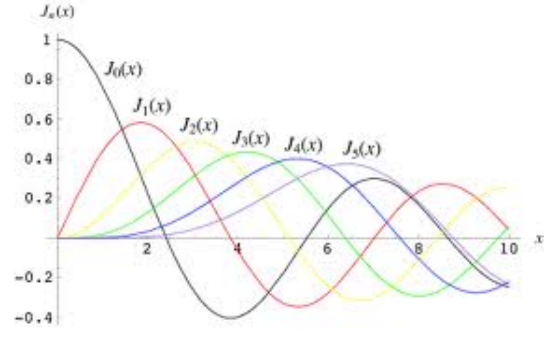


Рис. 5. Несколько первых функций Бесселя.

Дифференцируем соотношение (9.3) по  $z$ , что дает

$$\frac{1}{2}(t - 1/t) \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - 1/t\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \partial_z J_n(z) t^n.$$

Подставляя здесь вместо экспоненты разложение (9.3) и собирая коэффициенты при степенях  $t$ , находим

$$\frac{d}{dz} J_n(z) = \frac{1}{2} [J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)]. \quad (9.4)$$

Дифференцируем соотношение (9.3) по  $t$ , что дает

$$\frac{z}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - 1/t\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n J_n(z) t^{n-1}.$$

Подставляя здесь вместо экспоненты разложение (9.3) и собирая коэффициенты при степенях  $t$ , находим

$$\frac{2n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z). \quad (9.5)$$

Комбинируя (9.4) и (9.5), находим

$$\frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^n J_{n-1}(z), \quad (9.6)$$

$$\frac{d}{dz} \frac{J_n(z)}{z^n} = -\frac{J_{n+1}(z)}{z^n}. \quad (9.7)$$

В частности,  $dJ_0/dz = -J_1$ . Из (9.6) следует соотношение  $z^{-2n+1} \frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^{-n+1} J_{n-1}(z)$ . Дифференцируя его по  $z$  и применяя (9.7), находим замкнутое уравнение на  $J_n$

$$\frac{d^2}{dz^2} J_n + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} J_n + J_n - \frac{n^2}{z^2} J_n = 0, \quad (9.8)$$

которое называется уравнением Бесселя. Отметим, что мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (3.6).

Выписывая обратное преобразование Фурье к (9.2), находим

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \exp(iz \sin \theta - in\theta) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \cos(z \sin \theta - n\theta), \end{aligned} \quad (9.9)$$

где мы воспользовались тем, что мнимая часть первого интеграла равна нулю из-за того, что мнимая часть  $\exp(iz \sin \theta - in\theta)$  антисимметрична по  $\theta$ , и воспользовались тем, что косинус является четной функцией. Отметим, что выражение (9.9) автоматически приводит к соотношению  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ .

**Задача 9.2.** Доказать правила дифференцирования (9.4), исходя из соотношения (9.9).

Раскладывая правую часть соотношения (9.9) по  $z$ , мы заключаем что при  $n > 0$  первый член разложения по  $z$  равен

$$\frac{z^n}{2\pi n!} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta (i \sin \theta)^n \exp(in\theta) = \frac{z^n}{2^n n!}. \quad (9.10)$$

Следующие члены разложения функции Бесселя по  $z$  можно найти из того же выражения (9.9). Однако мы построим это разложение, исходя из уравнения (9.8).

Рассмотрим случай малых  $z$ ,  $z \ll 1$ . В этом случае третьим слагаемым в уравнении (9.8) можно пренебречь и мы приходим к уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2} g + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} g - \frac{n^2}{z^2} g = 0, \quad (9.11)$$

которое имеет степенные решения  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$ . Обратим внимание на причину, по которой уравнение (9.11) имеет степенные решения, и которая заключается в том, что при преобразовании  $z \rightarrow Az$ , где  $A$  – произвольный фактор, все три слагаемых в уравнении (9.11) преобразуются одинаковым образом, то есть уравнение переходит в себя. Это означает, что существуют решения уравнения (9.11), которые при преобразовании  $z \rightarrow Az$  переходят в себя с точностью до множителя, именно такими являются степенные решения  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$ .

Поскольку уравнение Бесселя (9.8) не обладает указанным свойством симметрии уравнения (9.11), его решение не может быть степенным. Тем не менее решения  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$  определяют поведение произвольного решения уравнения Бесселя (9.8) при малых  $z$ . Обратим внимание на то, что при  $n > 0$  решение  $g_2$  сингулярно в нуле, то есть стремится к бесконечности при  $z \rightarrow 0$ . Поэтому, если функция  $g$  регулярна в нуле, то ее поведение определяется  $g_1$ , то есть  $g \propto z^n$  при малых  $z$ . Это поведение с точностью до множителя определяет решение уравнения Бесселя (9.8). Такими решениями являются функции Бесселя  $J_n(z)$ , первый член разложения которой по  $z$  определяется (9.10).

Заметим, что при  $n = 0$  оба решения уравнения (9.11),  $g_1 = z^n$  и  $g_2 = z^{-n}$ , совпадают между собой, то есть, как говорят, имеет место вырождение. Чтобы разобраться с этим случаем, следует вернуться к уравнению (9.11), в котором надо положить  $n = 0$ . Это уравнение является уравнением первого порядка для  $dg/dz$ , решением которого, очевидно, является

$dg/dz = C_1/z$ , где  $C_1$  – произвольная константа. Интегрируя это уравнение дальше, мы находим общее решение  $g = C_2 + C_1 \ln z$ , где  $C_2$  – вторая произвольная константа. (Отметим, что возникновение логарифма типично для вырожденных случаев.) Таким образом, и при  $n = 0$  имеется два решения уравнения (9.11), одно из которых (константа) регулярно в нуле, а второе (логарифм) сингулярно. Выражение (9.10) при  $n = 0$  определяет функцию, которая является регулярной в нуле, и потому естественно рассматривать ее наряду с остальными функциями Бесселя.

Уточним теперь поведение функций Бесселя, найдя их разложение по  $z$ . Для этого перепишем уравнение Бесселя (9.8), как

$$\frac{d^2}{dz^2} g + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} g - \frac{n^2}{z^2} g = -g. \quad (9.12)$$

Запишем функцию Бесселя в виде

$$J_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n + \delta J_n,$$

где  $\delta J_n$  – дополнительный вклад. Подстановка этого выражения в уравнение (9.12) дает

$$\frac{d^2}{dz^2} \delta J_n + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} \delta J_n - \frac{n^2}{z^2} \delta J_n = -\frac{1}{n!} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \delta J_n. \quad (9.13)$$

Отметим, что главный член (9.10) исчез в левой части уравнения (9.13), поскольку он является решением уравнения (9.11). Опуская вклад  $\delta J_n$  в правой части уравнения (9.13) и решая оставшееся уравнение, мы находим

$$\delta J_n = -\frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2}. \quad (9.14)$$

Мы видим, что выражение (9.14) содержит лишнюю степень 2 по сравнению с основным членом (9.10), то есть действительно является малой поправкой при малых значениях  $z$ .

Можно продолжить начатую итерационную процедуру, находя следующие поправки к  $\delta J_n$ , то есть представив его в виде

$$\delta J_n = \delta J_n^{(1)} + \delta J_n^{(2)} + \dots,$$

где  $\delta J_n^{(1)}$  определяется выражением (9.14), а связь между поправками определяется уравнением

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \frac{n^2}{z^2}\right) \delta J_n^{(m+1)} = -\delta J_n^{(m)}.$$

В результате мы получаем следующий ряд для функций Бесселя

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m}. \quad (9.15)$$

Отметим, что это ряд по целым степеням  $z$ , который содержит только четные или только нечетные степени  $z$ , в зависимости от четности  $n$ .

Мы получили решение (9.15) уравнения Бесселя (9.8) в виде степенного ряда. Этот ряд абсолютно сходится при всех действительных  $z$ , поскольку отношение коэффициентов при степенях  $(z/2)^{n+2m+2}$  и  $(z/2)^{n+2m}$  равно  $-[(m+2)(m+1)(n+m+2)(n+m+1)]^{-1}$ , то есть стремится к нулю с ростом  $m$ . Таким образом, ряд (9.15) определяет функцию Бесселя при всех действительных  $z$ . Более того, он определяет и функцию комплексного переменного, которая получается аналитическим продолжением  $J_n(z)$  с действительных  $z$ . Поскольку ряд (9.15) является абсолютно сходящимся, то функция  $J_n(z)$  не имеет особенностей на всей плоскости комплексного переменного  $z$ . В то же время бесконечность является существенной особенностью точкой функции Бесселя  $J_n(z)$ .

**Задача 9.3.** Ряд (9.15) представляет функцию Бесселя для целых значений  $n$ . Можно ввести функции Бесселя произвольного индекса  $\nu$ ,  $J_\nu(z)$ , которые являются аналитическим продолжением  $J_n(z)$ . Как будет выглядеть разложение  $J_\nu(z)$  в ряд по  $z$ ?

**Задача 9.4.** Построить разложение в ряд (9.15), исходя из соотношения (9.9).

Соотношение (9.9) позволяет найти асимптотическое поведение функций Бесселя при больших значениях  $z$ . В этом случае работает приближение стационарной фазы, смотри раздел 18 В. Положение точки стационарной фазы получается из условия равенства нулю производной аргумента косинуса по  $\theta$  в выражении (9.9), что дает  $z \cos \theta_0 = n$ . Таким образом, в силу большого значения  $z$  стационарная фаза близка к  $\pi/2$  (что предполагает неравенство  $z \gg n$ ). Используя выражение для приближения стационарной фазы (18.8), находим

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (9.16)$$

Таким образом,  $J_n(z)$  стремится к нулю при  $z \rightarrow \infty$ .

**Задача 9.5.** Найти асимптотическое выражение функции Бесселя при больших по абсолютной величине отрицательных  $z$ .

Введем функции  $f(\lambda, z) = \sqrt{z} J_n(\lambda z)$ . Эти функции вследствие (9.8) удовлетворяют уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} - \frac{n^2 - 1/4}{z^2}\right) f = -\lambda^2 f. \quad (9.17)$$

Обратим внимание на то, что здесь стоит оператор Штурма-Лиувилля (3.6) с  $Q = 0$ . Прямым следствием уравнения (9.17) является

$$f(\lambda, z) f''(\mu, z) - f''(\lambda, z) f(\mu, z) = (\lambda^2 - \mu^2) f(\lambda, z) f(\mu, z).$$

Интегрируя это соотношение на интервале от нуля до единицы, мы находим

$$\int_0^1 dz f(\lambda, z) f(\mu, z) = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} [f(\lambda, 1) f'(\mu, 1) - f'(\lambda, 1) f(\mu, 1)].$$

Перепишем это соотношение в терминах функций Бесселя

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz z J_n(\lambda z) J_n(\mu z) \\ &= \frac{J_n(\lambda) \mu J'_n(\mu) - J_n(\mu) \lambda J'_n(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2} \\ &= \frac{J_n(\lambda) \mu J_{n+1}(\mu) - J_n(\mu) \lambda J_{n+1}(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2}, \end{aligned} \quad (9.18)$$

где мы использовали соотношение (9.7). Устремляя здесь  $\mu \rightarrow \lambda$  и раскрывая получившуюся неопределенность по правилу Лопиталья, мы находим

$$\begin{aligned} \int_0^1 dz z J_n^2(\lambda z) &= \frac{1}{2} [J_{n+1}^2(\lambda) - J_n^2(\lambda)] \\ &+ \frac{n}{\lambda^2} J_n(\lambda) J_{n+1}(\lambda), \end{aligned} \quad (9.19)$$

где мы использовали соотношения (9.6,9.7).

Рассмотрим граничную задачу, когда функция  $f$  подчиняется уравнению (9.17), ее значение при  $z = 1$  равно нулю и она регулярна в нуле. В этом случае из набора  $f(\lambda, z)$  следует выделить функции с  $\lambda = \gamma_k$ , где  $\gamma_k$  — нули функции Бесселя  $J_n$ :  $J_n(\gamma_k) = 0$ . Обозначим эти функции  $f_k$ ,  $f_k(z) = \sqrt{z} J_n(\gamma_k z)$ . Как следует из уравнения (9.18), функции  $f_k$  ортогональны:  $\int_0^1 dz f_k(z) f_m(z) = 0$ , если  $k \neq m$ . Впрочем, это свойство следует также и из самосопряженности оператора в левой части уравнения (9.17) на классе функций  $f_k$  (с нулевыми условиями на границе). Нормировку функций  $f_k$  можно найти из соотношения (9.19), которое для  $\lambda = \gamma_k$  дает

$$A_k = \int_0^1 dz z J_n^2(\gamma_k z) = \frac{1}{2} J_{n+1}^2(\gamma_k). \quad (9.20)$$

Функции  $f_k$  составляют полный набор для класса функций, обращающихся в ноль при  $z = 1$ . Поэтому такие функции можно разложить в ряд:

$$F(z) = \sum_k C_k \sqrt{z} J_n(\gamma_k z), \quad (9.21)$$

$$C_k = A_k^{-1} \int_0^1 dz \sqrt{z} J_n(\gamma_k z) F(z). \quad (9.22)$$

**Задача 9.6.** Найти интеграл

$$\int_0^\infty dz \exp(-az) J_0(z).$$

**Задача 9.7.** Найдите интеграл

$$\int_0^{\infty} dz \exp(-az) J_1(z).$$

Указание: воспользоваться соотношением  $dJ_0/dz = -J_1$ .

**Задача 9.8.** Найдите интеграл

$$\int_0^{\infty} dz z \exp(-p^2 z^2) J_0(z).$$

**Задача 9.9.** Найдите интеграл

$$\int_0^{\infty} dz \frac{J_2(z)}{z^2}.$$

**Задача 9.10.** Разложите функцию  $\sqrt{z} J_1(z) - z^{3/2} J_1(1)$  на интервале  $(0, 1)$  в ряд по  $\sqrt{z} J_1(\gamma_k z)$  (то есть найти коэффициенты этого разложения).

## 10. ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

При решении задач теории поля или квантовой механики зачастую возникают случаи, когда описывающие поле уравнения обладают симметрией относительно вращений вокруг некоторой точки. В этом случае задача допускает разделение переменных. Типичным примером является уравнение Шрёдингера для частицы, помещенной в так называемое центрально-симметричное поле, потенциал которого  $U$  зависит только от расстояния  $r$  до некоторой точки, в которую мы поместим начало координат. При решении такого рода уравнений, дифференциальная часть которого управляется Лапласианом, возникают полиномы Лежандра.

Напомним, что в трехмерном пространстве Лапласиан электростатического потенциала точечного заряда  $1/R$  равен нулю,  $\Delta(1/R) = 0$ . Здесь  $R$  – расстояние от точки наблюдения до точечного заряда. Поместим точечный заряд в точку  $(0, 0, 1)$  и перейдем к сферической системе координат  $r, \theta, \varphi$ . В этом случае  $R = \sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}$ . Условие же  $\Delta R^{-1} = 0$  записывается в виде

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R^{-1} + \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial R^{-1}}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Здесь отсутствуют производные по  $\varphi$ , поскольку  $R$  от этой переменной не зависит. Переходя к переменной  $\mu = \cos \theta$ , которая меняется от  $-1$  до  $+1$ , мы находим

$$(r^2 \partial_r^2 + 2r \partial_r) R^{-1} + \partial_\mu [(1 - \mu^2) \partial_\mu R^{-1}] = 0. \quad (10.1)$$

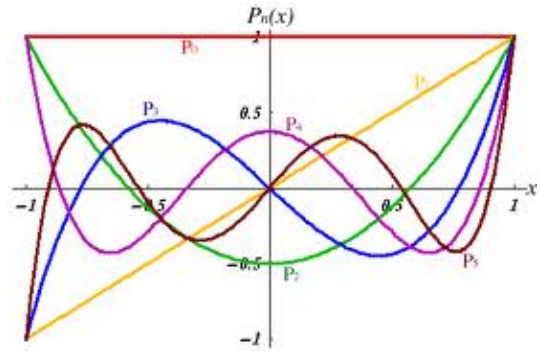


Рис. 6. Несколько первых полиномов Лежандра.

Полиномы Лежандра  $P_n(\mu)$  вводятся, как коэффициенты разложения в ряд Тейлора  $R^{-1}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^n. \quad (10.2)$$

Поскольку особенности левой части (10.2) по  $r$  (точки ветвления)  $\mu \pm i\sqrt{1 - \mu^2}$  лежат на единичном расстоянии от начала координат, то радиус сходимости ряда в правой части (10.2) равен единице, то есть он сходится при  $r < 1$ . Заметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \frac{r^{-1}}{\sqrt{r^{-2} - 2r^{-1}\mu + 1}}.$$

Это позволяет записать эквивалентное (10.2) разложение по отрицательным степеням  $r$ :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) r^{-1-n}. \quad (10.3)$$

Этот ряд сходится при  $r > 1$ .

Как следует из (10.2) или (10.3), функция  $P_n(\mu)$  является полиномом  $n$ -го порядка, симметричным по  $\mu$  при четных  $n$  и антисимметричным по  $\mu$  при нечетных  $n$ . Отметим также равенство  $P_n(1) = 1$ . Оно непосредственно следует из того, что при  $\mu = 1$   $R = 1 - r$ , а  $(1 - r)^{-1} = \sum r^n$ . Явный вид полиномов Лежандра может быть найден прямым разложением  $R^{-1}$  в соответствии с (10.2) или (10.3). Первые три полинома Лежандра равны

$$P_0(\mu) = 1, \quad P_1(\mu) = \mu, \quad P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1). \quad (10.4)$$

Графики нескольких первых полиномов Лежандра приведены на рисунке 6, где они изображены на интервале  $-1 < \mu < 1$ . В силу антисимметрии для нечетного индекса  $P_{2n+1}(0) = 0$ .

**Задача 10.1.** Найдите значение  $P_{2n}(0)$ .

Подставляя правую часть соотношения (10.2) вместо  $R^{-1}$  в уравнение (10.1), мы приходим к уравнениям

$$\frac{d}{d\mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu} P_n \right] + n(n+1) P_n = 0, \quad (10.5)$$

которые являются коэффициентами разложения получившегося соотношения по степеням  $r$ . Уравнения (10.5) переписываются в виде  $P'' - 2\mu(1 - \mu^2)^{-1}P' + n(n+1)(1 - \mu^2)^{-1}P = 0$  (где штрих обозначает производную по  $\mu$ ), то есть мы имеем дело с оператором Штурма-Лиувилля (3.6).

Воспользуемся тождеством

$$\hat{K}_1 \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = 0, \quad (10.6)$$

$$\hat{K}_1 = \partial_r - \mu(2r\partial_r + 1) + (r^2\partial_r + r), \quad (10.7)$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор  $\hat{K}_1$  к правой части (10.2) и приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях  $r$ , находим рекуррентное соотношение

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)\mu P_n + nP_{n-1} = 0. \quad (10.8)$$

Это соотношение позволяет явно находить  $P_{n+1}(\mu)$ , если известны выражения для  $P_{n-1}(\mu)$  и  $P_n(\mu)$ . Таким образом, стартуя с первых двух полиномов Лежандра, можно, последовательно применяя (10.8), найти выражение для произвольного полинома Лежандра.

**Задача 10.2.** Найти выражение для  $P_3(\mu)$ , воспользовавшись рекуррентным соотношением (10.8).

**Задача 10.3.** Доказать соотношение

$$\sum_{k=0}^n (2k+1)P_k(x)P_k(y) = (n+1) \frac{P_n(x)P_{n+1}(y) - P_{n+1}(x)P_n(y)}{y-x}.$$

*Указание:* действовать по индукции с учетом рекуррентного соотношения (10.8).

Далее, имеет место тождество

$$\hat{K}_2 \frac{1}{\sqrt{1 - 2r\mu + r^2}} = 0, \quad (10.9)$$

$$\hat{K}_2 = \partial_r + (1 - \mu/r)\partial_\mu, \quad (10.10)$$

которое легко проверяется непосредственно. Применяя оператор  $\hat{K}_2$  к правой части (10.2) и приравнявая к нулю коэффициенты при всех степенях  $r$ , находим соотношение

$$nP_n - \mu \frac{d}{d\mu} P_n + \frac{d}{d\mu} P_{n-1} = 0. \quad (10.11)$$

Для полиномов Лежандра справедливо следующее выражение

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^n. \quad (10.12)$$

Это соотношение можно доказать по индукции, исходя из рекуррентного соотношения (10.8): если (10.12)

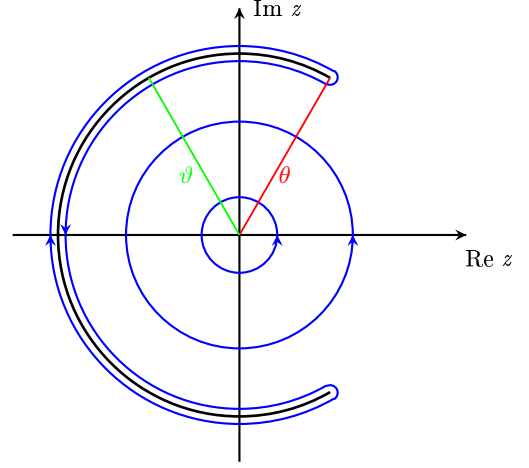


Рис. 7. Преобразование контура интегрирования в интегральном представлении полиномов Лежандра.

справедливо для  $P_{n-1}$  и  $P_n$ , то в силу (10.8) оно справедливо и для  $P_{n+1}$ . Кроме того, выражение (10.12) легко проверяется для первых двух полиномов Лежандра (10.4), что завершает доказательство.

**Задача 10.4.** Показать, что в силу (10.8) соотношение (10.12) справедливо для  $P_{n+1}$ , если (10.12) справедливо для  $P_{n-1}$  и  $P_n$ .

**Задача 10.5.** Найти значение  $P_{2n}(0)$ , исходя из (10.12).

Полиномы Лежандра удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} (\mu^2 - 1) \frac{d}{d\mu} P_n(\mu) &= n[\mu P_n(\mu) - P_{n-1}(\mu)] \\ &= \frac{n(n+1)}{2n+1} [P_{n+1}(\mu) - P_{n-1}(\mu)], \end{aligned} \quad (10.13)$$

которые проверяются непосредственно, исходя из соотношения (10.12). Соотношения (10.13) позволяют свести производные от полиномов Лежандра к комбинации самих этих полиномов.

**Задача 10.6.** Вывести соотношения (10.13), исходя из соотношения (10.12).

**Задача 10.7.** Проверить выполнение уравнения (10.5) для полиномов Лежандра, исходя из формул дифференцирования (10.11, 10.13).

Соотношение (10.2) можно использовать для получения интегрального представления для полиномов Лежандра. Воспользовавшись теоремой о вычете, мы находим из соотношения (10.2)

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1} \sqrt{1 - 2z\mu + z^2}},$$

где интеграл идет против часовой стрелки по небольшому замкнутому контуру, охватывающему начало координат. Корень квадратный имеет точки ветвления по  $z$  при  $z_{\pm} = \mu \pm i\sqrt{1-\mu^2}$ , которые лежат на единичной окружности, если  $\mu$  – действительное число и  $|\mu| < 1$ . Эти точки ветвления расположены в точках  $z_{\pm} = \exp(\pm i\theta)$ , где  $\mu = \cos \theta$ . Таким образом, разрез функции  $(1-2z\mu+z^2)^{-1/2}$  можно провести вдоль дуги единичной окружности в плоскости  $z$ , которая определяется условиями  $\theta < \vartheta < 2\pi - \theta$ , где  $\theta$  предполагается лежащим в интервале  $0 < \theta < \pi$ , а  $\vartheta$  – аргумент  $z$ . Это построение представлено на рисунке 7, где разрез показан черной дугой.

Деформируем теперь контур интегрирования в приведенном выше интеграле. Сначала мы увеличим его радиус, а затем “вывернем” через бесконечность. В результате контур будет охватывать разрез функции  $(1-2z\mu+z^2)^{-1/2}$ . Эта последовательность деформаций проиллюстрирована на рисунке 7, где контуры интегрирования показаны синим цветом. Прижимая контур интегрирования к разрезу, мы сводим интеграл к интегралу по разрезу от скачка функции  $z^{-n-1}(1-2z\mu+z^2)^{-1/2}$ . В терминах интеграла по углу  $\vartheta$  получаем

$$P_n(\cos \theta) = \frac{2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} d\vartheta \frac{\sin[(n+1/2)\vartheta]}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \vartheta)}}, \quad (10.14)$$

где мы свели интеграл к интегрированию по полудуге.

Интегральное представление (10.14) позволяет найти асимптотическое выражение для полиномов Лежандра при больших  $n$ . В этом случае в силу быстрой осцилляции  $\sin[(n+1/2)\vartheta]$  главный вклад в интеграл набирается вблизи нижнего предела интегрирования из-за знаменателя в (10.14). Подставляя  $\vartheta = \theta + x$ , раскладывая по  $x$  подынтегральное выражение и устремляя затем верхний предел интегрирования к бесконечности, мы находим

$$P_n(\cos \theta) \approx \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dx \frac{\sin[(n+1/2)(\theta+x)]}{\sqrt{2 \sin \theta x}}. \quad (10.15)$$

Вычисляя здесь интеграл по  $x$ , мы находим асимптотическое выражение

$$P_n(\cos \theta) \approx \frac{2 \cos[(n+1/2)\theta - \pi/4]}{\sqrt{(2n+1)\pi \sin \theta}}. \quad (10.16)$$

**Задача 10.8.** Получить выражение (10.16) из (10.15).

Выражение (10.16) можно получить также методом WKB (смотри раздел 18D), который работает как раз при больших  $n$ . Чтобы применить этот метод, перепишем уравнение (10.5) в терминах переменной  $t = \ln \tan(\theta/2)$ , где  $\mu = \cos \theta$ . Тогда оно принимает вид уравнения (18.23):

$$\frac{d^2 P_n}{dt^2} + \frac{n(n+1)}{\cosh^2 t} P_n = 0. \quad (10.17)$$

Таким образом

$$p = i(n+1/2)/\cosh t = i(n+1/2)\sin \theta, \\ S = \int dt p(t) = i(n+1/2)\theta,$$

где мы подставили  $\sqrt{n(n+1)} \approx n+1/2$ . При больших  $n$  выполняется неравенство  $dp/dt \ll p^2$ , что оправдывает применение метода WKB. Суммируя теперь два члена (18.24), мы и получаем выражение (10.16). Разумеется, приведенным методом невозможно получить общий множитель и сдвиг фазы.

Рассмотрим теперь произвольное решение уравнения (10.5), регулярное в точке  $\mu = 1$ , когда оно разлагается в ряд Тейлора по  $x = \mu - 1$ . Перепишем уравнение (10.5) в терминах переменной  $x$ :

$$(2x+x^2)P'' + 2(1+x)P' - n(n+1)P = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по  $x$ . Подставляя в это выражение разложение в ряд Тейлора  $P$  по  $x$ ,  $P = \sum_k p_k x^k$ , мы находим рекуррентное соотношение

$$2(k+1)^2 p_{k+1} = [n(n+1) - k(k+1)]p_k.$$

Таким образом, при целом  $n$  цепочка соотношений обрывается на  $k = n$ , и решение оказывается конечным полиномом, который (с точностью до множителя) совпадает с  $P_n(\mu)$ . Если же  $n$  не является неотрицательным целым числом, то в разложении присутствуют все степени  $x$ . В пределе больших  $k$  мы имеем  $p_{k+1} = -(1/2)p_k$ . Отсюда следует, что радиус сходимости этого ряда равен 2, и, более того, он приводит к простому полюсу при  $x = -2$ , то есть  $\mu = -1$ . Таким образом, мы доказали, что полиномами Лежандра исчерпываются решения уравнения (10.5), регулярные как в точке  $\mu = 1$ , так и в точке  $\mu = -1$ .

Как следует из уравнения (10.5), полиномы Лежандра являются собственными функциями оператора

$$\hat{L} = \frac{d}{d\mu}(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}, \quad (10.18)$$

который является самосопряженным на классе функций, заданных на интервале  $-1 < \mu < 1$  и остающихся ограниченными на этом интервале, включая конечные точки. Самосопряженность оператора (10.18), то есть свойство (17.33), смотри раздел 17D, легко проверяется интегрированием по частям. Поэтому полиномы Лежандра удовлетворяют условиям ортогональности (17.37):

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n(\mu)P_l(\mu) = 0, \quad (10.19)$$

если  $n \neq l$ .

**Задача 10.9.** Прямо доказать соотношение ортогональности (10.19). Указание: воспользоваться представлением (10.12).

Нормировочный множитель для полиномов Лежандра дается выражением

$$\int_{-1}^1 d\mu P_n^2(\mu) = \frac{2}{2n+1}. \quad (10.20)$$

Общее соотношение (17.40) означает, что полиномы Лежандра, как полная система собственных функций оператора (10.18), конечных на интервале  $(-1, +1)$ , удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1/2) P_k(x) P_k(y) = \delta(x-y). \quad (10.21)$$

**Задача 10.10.** Получить выражение для нормировочного множителя (10.20). Указание: воспользоваться соотношением (10.2).

**Задача 10.11.** Прямо получить соотношение (10.21). Указание: воспользоваться результатом задачи (10.3).

**Задача 10.12.** Найти  $\int_{-1}^1 dx x^2 P_{n-1}(x) P_{n+1}(x)$ .

**Задача 10.13.** Найти разложение в ряд по полиномам Лежандра  $P_n(x)$  монома  $x^k$ .

## 11. ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА

Полиномы Эрмита естественно возникают в задаче о квантовом осцилляторе, которая является одной из базисных задач квантовой механики. Помимо этого, они возникают в различных задачах, требующих рассмотрения функций на всей прямой, в отличие от полиномов Лежандра, которые относятся к отрезку  $(-1, 1)$ . Кроме того, в ряде случаев разложение по полиномам Эрмита оказывается более эффективным, чем ряд Тейлора.

Полиномы Эрмита определяются, как коэффициенты разложения

$$\exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x). \quad (11.1)$$

Функция в левой части соотношения (11.1) является производящей функцией полиномов Эрмита. Очевидно, полиномы Эрмита с четным индексом являются четными функциями  $x$ , а полиномы Эрмита с нечетным индексом являются нечетными функциями  $x$ .

Подставляя в выражении (11.1)  $x = 0$  и раскладывая  $\exp(-t^2)$  в ряд по  $t$ , находим следующие значения четных полиномов Эрмита в нуле

$$H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n (2n-1)!!, \quad (11.2)$$

где  $(2n-1)!! \equiv (2n-1)(2n-3)\dots$ . Далее, при малых  $x$   $\exp(-t^2 + 2tx) \approx \exp(-t^2)(1+2tx)$ . Снова раскладывая  $\exp(-t^2)$  в ряд по  $t$ , находим следующие значения производных нечетных полиномов Эрмита в нуле

$$H'_{2n+1}(0) = (-1)^n 2^{n+1} (2n+1)!!. \quad (11.3)$$

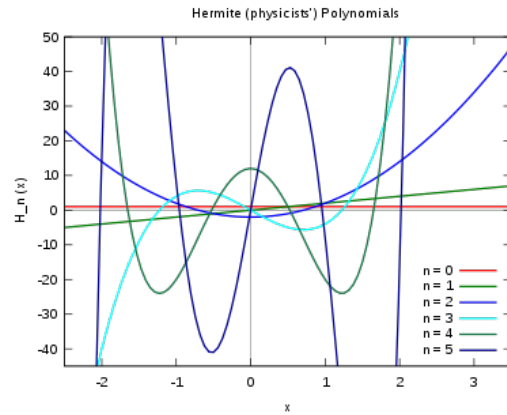


Рис. 8. Несколько первых полиномов Эрмита.

Дифференцируя соотношение (11.1) по  $x$ , мы находим выражение для производной

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = 2nH_{n-1}(x). \quad (11.4)$$

Далее, беря производную по  $t$  от соотношения (11.1) и приравнявая коэффициенты при степенях  $t$ , мы получаем

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x). \quad (11.5)$$

Это рекуррентное соотношение позволяет последовательно вычислять полиномы Эрмита. Первые полиномы Эрмита записываются в следующем виде

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2. \quad (11.6)$$

Графики нескольких первых полиномов Эрмита приведены на рисунке 8.

Подставляем в правую часть соотношения (11.4)  $H_{n-1}$ , выраженное в соответствии с (11.5) и дифференцируем получившееся соотношение по  $x$ . Выражая затем из (11.4)  $dH_{n+1}/dx$ , находим следующее уравнение

$$\frac{d^2 H_n}{dx^2} - 2x \frac{dH_n}{dx} + 2nH_n = 0, \quad (11.7)$$

которому подчиняются полиномы Эрмита. Отметим, что оператор в (11.7) относится к типу Штурма-Лиувилля (3.6). Уравнение (11.7) инвариантно относительно замены  $x \rightarrow -x$  и потому имеет четные и нечетные решения, в соответствии со сказанным выше о четности полиномов Эрмита.

Четное решение уравнения (11.7) может быть разложено в ряд по четным степеням  $x$ :

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (11.7) и приравнявая коэффициенты при степенях  $x$ , мы находим

рекуррентное соотношение

$$a_{k+1} = \frac{2k - n}{(k+1)(2k+1)} a_k,$$

которое позволяет последовательно вычислять коэффициенты разложения  $u$  в ряд по  $x$ . При больших  $k$  мы находим  $a_{k+1} \approx a_k/k$ , что дает асимптотику  $u \propto \exp(x^2)$  на больших  $x$ . Единственным исключением являются четные  $n$ , тогда ряд по  $x$  обрывается на  $k = n/2$ , и мы имеем дело с конечным полиномом, пропорциональным  $H_n$  с четным индексом. Аналогичным образом можно показать, что ряд по нечетным степеням  $x$ , представляющий нечетное решение уравнения (11.7), обрывается, если  $n$  нечетно. Этот ряд пропорционален полиному Эрмита  $H_n$  с нечетным индексом.

Выражая в соотношения (11.4)  $H_{n-1}$  в соответствии с (11.5), находим

$$\left(\frac{d}{dx} - 2x\right) H_n = -H_{n+1}. \quad (11.8)$$

Это соотношение легко позволяет доказать по индукции выражение

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2). \quad (11.9)$$

Соотношение (11.9) очевидно, выполняется при  $n = 0$  воспроизводится при применении оператора в левой части (11.8). Соотношение (11.9) приводит к выводу, что  $H_n$  является полиномом степени  $n$ .

**Задача 11.1.** Доказать, что старший член разложения  $H_n(x)$  имеет вид  $2^n x^n$ .

**Задача 11.2.** Получить соотношение (11.1) из (11.9).

Для полиномов Эрмита справедливо интегральное представление

$$H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (x + it)^n \exp(-t^2). \quad (11.10)$$

Для доказательства заметим, что представление (11.10) воспроизводит соотношение (11.4), а также удовлетворяет (11.2, 11.3). Таким образом, мы можем по индукции, переходя от  $n-1$  к  $n$ , обосновать представление (11.10). Представляя подынтегральное выражение в соотношении (11.10)  $\exp[n \ln(x + it) - t^2]$  и используя для больших  $n$  метод перевала, мы находим (суммируя вклады от двух перевальных точек) выражение

$$H_n(x) \approx \sqrt{2} (2n/e)^{n/2} \exp(x^2/2) \cos\left(\sqrt{2n} x - \pi n/2\right), \quad (11.11)$$

справедливое при  $n \gg x, 1$ .

Возвратимся теперь к уравнению (?). Функции  $\Psi_n(x) \propto \exp(-x^2/2) H_n(x)$  составляют полный набор

решений этого уравнения, стремящиеся к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ . В силу того, что оператор в левой части уравнения (?) является самосопряженным на этом классе функций, то  $\Psi_n$  являются ортогональными, то есть  $\int dx \Psi_n(x) \Psi_m(x) = 0$ , если  $n \neq m$ . Это означает

$$\int dx \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x) = 0. \quad (11.12)$$

Отнормируем теперь функции  $\Psi_n(x)$  так, чтобы этот набор был ортонормированным:  $\int dx \Psi_n(x) \Psi_m(x) = \delta_{mn}$ . Для этого воспользуемся выражением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) H_n^2(x) = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (11.13)$$

Отсюда находим ортонормированный базис

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{2^n n!}} \exp(-x^2/2) H_n(x). \quad (11.14)$$

Докажем теперь полноту базиса (11.14). Для этого воспользуемся соотношением

$$\frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2) = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} (iq)^n \exp(-q^2/4 + iqx).$$

Далее

$$\sum_n \Psi_n(x) \Psi_n(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \exp(-q^2/4 + iqx) \exp(x^2/2 + y^2/2) \sum_n \frac{(iq)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dy^n} \exp(-y^2).$$

Сумма по  $n$  представляет собой ряд Тейлора, который собирается в  $\exp[-(y + iq/2)^2]$ . Подставляя этот результат в полученную выше формулу, мы находим

$$\sum_n \Psi_n(x) \Psi_n(y) = \exp(x^2/2 - y^2/2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \exp[iq(x - y)] = \delta(x - y),$$

что завершает доказательство полноты.

Таким образом, любую функцию  $f(x)$ , заданную на действительных  $x$  и не слишком быстро стремящуюся к бесконечности при  $x \rightarrow \pm\infty$ , можно разложить в ряд по базису (11.14):

$$f(x) = \sum_n b_n \Psi_n(x), \quad b_n = \int dx \Psi_n(x) f(x).$$

Это разложение можно переписать в терминах полиномов Эрмита

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp(-x^2/2) H_n(x), \quad (11.15)$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2/2} H_n(x) f(x). \quad (11.16)$$



**Задача 11.3.** Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^2) H_{2n}(xy).$$

**Задача 11.4.** Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[-(x-y)^2] H_n(x).$$

**Задача 11.5.** Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x \exp(-x^2) H_{2n-1}(xy).$$

**Задача 11.6.** Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n \exp(-x^2) H_n(xy).$$

*Примечание:* Ответ выражается через полиномы Лежандра.

**Задача 11.7.** Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp(-x^2) \sinh(\beta x) H_{2n+1}(x).$$

**Задача 11.8.** Найти значение интеграла

$$\int_0^{+\infty} dx \exp(-x^2) \cosh(\beta x) H_{2n}(x).$$

**Задача 11.9.** Доказать соотношение

$$H_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{d^2}{dx^2}\right) (2x)^n.$$

*Указание:* просуммировать по  $n$  правую часть этого соотношения с весом  $t^n/n!$  и показать, что эта сумма сводится к левой части соотношения (11.1).

**Задача 11.10.** Доказать соотношение (11.13). Указание: составить комбинацию  $\exp(-t^2 + 2tx - s^2 + 2sx)$ , выразить ее через двойную сумму по полиномам Эрмита из соотношения (11.1) и проинтегрировать получившееся равенство по  $x$  с весом  $\exp(-x^2)$ . На этом пути получатся и соотношения ортогональности.

## 12. ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Вырожденная гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  (confluent hypergeometric function) возникает во многих задачах математической физики. Она является решением вырожденного гипергеометрического уравнения

$$z \frac{d^2 u}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{du}{dz} - \alpha u = 0, \quad (12.1)$$

где  $\alpha$  и  $\gamma$  – произвольные параметры. Уравнение (12.1) переписывается в виде  $u'' + (\gamma/z - 1)u' - (\alpha/z)u = 0$ , то есть мы снова сталкиваемся с оператором Штурма-Лиувилля (3.6). Функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  характеризуется тем, что она аналитична в точке  $z = 0$  и имеет единичное значение в нуле:  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ .

Уравнение (12.1) позволяет найти коэффициенты разложения вырожденной гипергеометрической функции  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  в ряд Тейлора около точки  $z = 0$ . Вычисляя последовательно коэффициенты этого разложения из уравнения (12.1) с учетом условия  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ , мы находим

$$\Phi = 1 + \frac{\alpha z}{\gamma 1!} + \frac{\alpha(\alpha+1) z^2}{\gamma(\gamma+1) 2!} + \dots, \quad (12.2)$$

с очевидным способом построения коэффициентов ряда. При отрицательных целых  $\alpha$  ряд (12.2) обрывается и  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  сводится к полиному. При больших  $n$  отношение коэффициентов при степенях  $z^n$  и  $z^{n-1}$  в разложении (12.2) стремится к  $1/n$ . Поэтому ряд (12.2) сходится на всей плоскости комплексного переменного, то есть единственной особенностью вырожденной гипергеометрической функции является бесконечность, которая является существенной особой точкой  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ .

При неотрицательных целых  $\alpha$  ряд (12.2) обрывается и вырожденная гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  сводится к полиному. В частности справедливы соотношения

$$H_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \Phi(-n, 1/2, x^2), \quad (12.3)$$

$$H_{2n+1}(x) = 2(-1)^n \frac{(2n+1)!}{n!} x \Phi(-n, 3/2, x^2), \quad (12.4)$$

которые сводят полиномы Эрмита к вырожденной гипергеометрической функции.

Уравнение (12.1) является дифференциальным уравнением второго порядка и потому имеет два линейно независимых решения, одним из которых является вырожденная гипергеометрическая функция  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ . Второе независимое решение можно найти, заметив, что если  $u$  удовлетворяет уравнению (12.1), то  $z^{\gamma-1}u$  также удовлетворяет вырожденному гипергеометрическому уравнению с коэффициентами  $\alpha' = \alpha - \gamma + 1$ ,  $\gamma' = 2 - \gamma$ . Таким образом, общим решением уравнения (12.1) является

$$u = c_1 \Phi(\alpha, \gamma, z) + c_2 z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \quad (12.5)$$

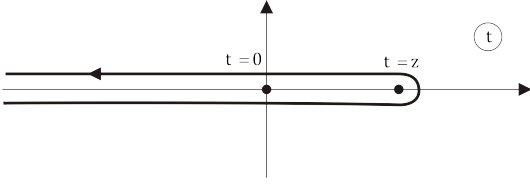


Рис. 9. Контур интегрирования в интегральном представлении вырожденной гипергеометрической функции.

где  $c_1$  и  $c_2$  – произвольные константы. При  $\gamma = 1$  оба члена в сумме (12.5) совпадают. Этот случай требует особого рассмотрения, тогда в общем решении возникает дополнительный логарифмический множитель.

Уравнение (12.1) является дифференциальным уравнением, в котором переменная  $z$  входит линейно. В этом случае можно найти интегральное представление решения этого уравнения при помощи метода Лапласа, смотри раздел 18С. Составляем функции  $P$  и  $Q$  в соответствии с выражениями (18.15):  $P = \gamma t - \alpha$ ,  $Q = t(t - 1)$ , и далее находим  $Z = t^{\alpha-1}(t - 1)^{\gamma-\alpha-1}$ . Таким образом, решение уравнения (12.1) может быть записано в виде контурного интеграла

$$u = \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-1} (t - 1)^{\gamma-\alpha-1}.$$

Применяя аналогичную процедуру к  $z^{\gamma-1}u$ , мы находим

$$u = z^{1-\gamma} \int_C dt e^{tz} t^{\alpha-\gamma} (t - 1)^{-\alpha}.$$

Производя в этом интеграле замену переменной интегрирования  $tz \rightarrow t$ , мы получаем

$$u = \int_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t - z)^{-\alpha}. \quad (12.6)$$

Контур  $C$  в интеграле (12.6) естественно выбрать так, чтобы он приходил из  $-\infty$  и возвращался в  $-\infty$  (обходя каким-то образом особенности подынтегрального выражения, имеющиеся при  $t = 0$  и  $t = z$ ), тогда произведение  $ZQ \exp(t)$  на концах этого контура будет равно нулю.

Интеграл (12.6) не имеет особенностей при  $z = 0$ , если контур интегрирования “охватывает” обе особенности. Выберем контур  $C$ , который приходит “снизу” из  $-\infty$  огибает особенности “справа” и возвращался в  $-\infty$  “сверху”, смотри рисунок 9. Интеграл по этому контуру должен с точностью до множителя совпадать с вырожденной гипергеометрической функцией  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ . Мы считаем, что разрезы функций  $t^{\alpha-\gamma}$  и  $(t - z)^{-\alpha}$  идут в  $-\infty$ , а значения этих функций при положительном значении переменной положительны. При  $z = 0$  контур интегрирования превращается в  $C^*$ , изображенный на рисунке 4, при этом возникает обратная Гамма-функция, смотри (8.8). Вспоминая теперь, что  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ , находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} \int_C dt e^t t^{\alpha-\gamma} (t - z)^{-\alpha}. \quad (12.7)$$

При целых отрицательных значениях  $\gamma$  ряд (12.2) не определен, так как, начиная с некоторого члена, знаменатель обращается в ноль. Этому соответствует наличие полюса у  $\Gamma(\gamma)$  в соотношении (12.7). В то же время сам контурный интеграл в соотношении (12.7) остается конечным и при целых отрицательных значениях  $\gamma$ . Поэтому  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$ , как функция  $\gamma$ , имеет простые полюса при  $\gamma = 0, -1, -2, \dots$

Производя в равенстве (12.7) замену  $t \rightarrow t + z$ , мы находим соотношение

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) = e^z \Phi(\gamma - \alpha, \gamma, -z). \quad (12.8)$$

Дифференцирование по  $z$  соотношения (12.7) и интегрирование по частям в контурном интеграле позволяет получить ряд соотношений:

$$\frac{d}{dz} \Phi(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z), \quad (12.9)$$

$$\frac{z}{\gamma} \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) = \Phi(\alpha + 1, \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z), \quad (12.10)$$

$$\alpha \Phi(\alpha + 1, \gamma + 1, z) = (\alpha - \gamma) \Phi(\alpha, \gamma + 1, z) + \gamma \Phi(\alpha, \gamma, z). \quad (12.11)$$

При больших положительных  $z$  основной вклад в контурный интеграл в (12.7) определяется окрестностью особой точки  $t = z$ . Делая замену переменных  $t = z + \zeta$  и пренебрегая зависимостью от  $\zeta$  в  $t^{\alpha-\gamma}$ , мы находим

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{2\pi i} e^z z^{\alpha-\gamma} \int_{C^*} d\zeta e^{\zeta} \zeta^{-\alpha},$$

где контур  $C^*$  изображен на рисунке 4. Этот контурный интеграл сводится к обратной Гамма-функции, и мы получаем окончательно

$$\Phi(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma}. \quad (12.12)$$

Асимптотическое выражение (12.12) справедливо и в комплексной области для  $z$  с большой положительной действительной частью.

**Задача 12.1.** Доказать, что  $\Phi(\alpha, \alpha, z) = \exp(z)$ .

**Задача 12.2.** Доказать соотношение (12.9, 12.10, 12.11).

**Задача 12.3.** Найти поведение вырожденной гипергеометрической функции  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  при  $\gamma \rightarrow 0$ . Выполняется ли при малых  $\gamma$  соотношение  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ ?

**Задача 12.4.** Найти значение  $\Phi(\alpha, \gamma, z)$  при целых положительных  $\alpha$  и  $\gamma$ ,  $\alpha \geq \gamma$ . Проверить выполнение условия  $\Phi(\alpha, \gamma, 0) = 1$ . Указание: в этом случае интеграл (12.7) сводится к вычету в точке  $t = z$ .

**Задача 12.5.** Найти второе независимое решение вырожденного гипергеометрического уравнения (12.1) при  $\gamma = 1$ . Указание: в соответствии с (12.5) при произвольном  $\gamma$  второе независимое решение можно записать в виде

$$\frac{1}{1-\gamma} [z^{1-\gamma} \Phi(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z) - \Phi(\alpha, \gamma, z)],$$

здесь надо перейти к пределу  $\gamma \rightarrow 1$ .

### 13. УРАВНЕНИЯ ХОПФА И БЮРГЕРСА

Уравнением Бюргера называется уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (13.1)$$

Уравнение (13.1) получается, например, при исследовании слабо нелинейной одномерной акустической волны в системе отсчета, движущейся с линейной скоростью звука. В этом случае нелинейный по  $u$  член в уравнении (13.1) происходит из зависимости скорости звука от амплитуды звуковой волны, а член со второй производной представляет затухание звуковой волны, связанное с диссипацией. Однако область применимости этого уравнения отнюдь не ограничивается приведенным примером, уравнение Бюргера возникает во многих физических задачах, чем и определяется его значение.

На самых больших временах любое решение уравнения (13.1), стремящееся к нулю на  $\pm\infty$  по  $x$ , стремится к нулю,  $u \rightarrow 0$ . Действительно, в силу уравнения Бюргера

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dx \frac{u^2}{2} = - \int dx \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2. \quad (13.2)$$

Таким образом, положительно определенная величина  $\int dx u^2$  убывает со временем и, при достаточно большом  $t$ , становится сколь угодно малым. Отсюда и следует приведенное утверждение.

Легко найти асимптотическое по времени поведение решения уравнения Бюргера  $u$ , которое стремится к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Тогда при больших  $t$  значение  $u$  становится малым и мы можем пренебречь нелинейным членом в уравнении (13.1). В результате мы приходим к чисто диффузионному уравнению. Локализованные решения этого уравнения имеют вид

$$u \propto \frac{1}{t^{1/2}} \exp \left[ -\frac{(x-x_0)^2}{4t} \right], \\ u \propto \frac{x-x_0}{t^{3/2}} \exp \left[ -\frac{(x-x_0)^2}{4t} \right],$$

вторая асимптотика реализуется при условии  $\int dx u = 0$ .

Более интересным является обратный случай сильной нелинейности, который реализуется, если для начальных условий  $UL \gg 1$ , где  $L$  – характерный масштаб (корреляционная длина) начального состояния  $u(0, x)$ , а  $U$  – характерное значение поля  $u(0, x)$ . В этом случае начальная эволюция поля  $u$  может быть описана в пренебрежении второй производной в уравнении (13.1), когда оно сводится к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (13.3)$$

которое называется уравнение Хопфа. Это уравнение содержит только первые производные от  $u$  и линейно по этим производным. Такое уравнение может быть решено методом характеристик (смотри ниже). А именно, можно легко найти уравнения для изменения поля  $u$  вдоль специальных траекторий (характеристик):

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = u. \quad (13.4)$$

Таким образом, начальные значения поля  $u$ , не меняясь, переносятся со скоростью  $u$ . Поле  $u$  вследствие уравнений (13.4) неявно определяется из соотношений

$$x = y + ut, \quad u = u(0, y), \quad (13.5)$$

где, как и выше,  $u(0, x)$  – начальное значение поля.

Отметим, что методом характеристик можно решить и более общее уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = f, \quad (13.6)$$

которое отличается от уравнения Хопфа (13.3) дополнительным членом в правой части, “накачкой”  $f$ , которая может быть произвольной функцией времени  $t$  и пространственной координаты  $x$ . Тогда вместо системы (13.4) надо решать уравнения

$$\frac{du}{dt} = f(t, x), \quad \frac{dx}{dt} = u. \quad (13.7)$$

Динамика, которая описывается уравнением Хопфа, обычно приводит к возникновению особенностей в поле  $u$ . Это следует из уравнения на производную  $s = \partial u / \partial x$ , которое получается из уравнения Хопфа (13.3) после дифференцирования:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = -s^2.$$

Таким образом, мы должны решать вдоль характеристики уравнение  $ds/dt = -s^2$ , решение которого имеет вид  $s = (1/s_0 + t)^{-1}$ , где  $s_0$  – значение производной  $s$  при  $t = 0$ . Если  $s_0 < 0$ , то значение  $s$  обращается в бесконечность при  $t = -1/s_0$ . Таким образом, если в начальном профиле  $s(0, x)$  имеются участки с отрицательными значениями  $s$ , то за конечное время производная обращается в бесконечность. Быстрее

всего это происходит для наибольшего по абсолютной величине значения  $s$ , которое определяется условием  $\partial s/\partial x = \partial^2 u/\partial x^2 = 0$ . Именно на характеристике, которая стартует из этой точки, которую мы обозначим  $y_0$ , впервые обращается в бесконечность  $s$ .

Проанализируем поведение решения уравнения Хопфа вблизи характеристики, стартующей из точки  $y_0$ . Раскладывая функцию  $u(0, y)$  в ряд Тейлора вблизи точки  $y_0$ , мы находим

$$u(0, y) \approx -c_1(y - y_0) + c_2(y - y_0)^3,$$

где  $c_1$  и  $c_2$  – положительные константы. Положительность  $c_1$  означает отрицательность  $s$  вблизи точки  $y_0$ , а положительность  $c_2$  означает, что значение  $s$  максимально по абсолютной величине в точке  $y_0$ . Далее, решая уравнения (13.5), мы находим

$$u = u_0 - c_1(x - ut - x_0 + u_0/c_1) + c_2(x - ut - x_0 + u_0/c_1)^3,$$

где мы ввели обозначение  $x_0 = y_0 + u_0/c_1$ . В этом случае в момент времени  $t = 1/c_1$ , который и является моментом, когда  $s$  обращается в бесконечность в точке  $x_0$ , приведенное соотношение сводится к

$$c_2(u - u_0)^3 = -c_1^4(x - x_0),$$

где мы опустили линейное по  $x - x_0$  слагаемое в члене с третьей степенью, как дающее малые поправки при малых  $x - x_0$ . Таким образом, мы приходим к профилю  $u - u_0$ , который пропорционален  $(x - x_0)^{1/3}$ , то есть является сингулярным в точке  $x = x_0$ . Эта сингулярность и является формальной причиной, по которой  $s$  обращается в бесконечность.

При приближении к особенности уравнение Хопфа становится неприменимым, так как растет вторая производная от  $u$ , и потому для анализа поведения поля  $u$  мы должны вернуться к исходному уравнению Бюргерса (13.1). После некоторого переходного процесса вблизи точки  $x_0$  формируется специальное решение, которое движется со скоростью  $u_0$ , то есть  $du/dt = -u_0 du/\partial x$ . Подставляя это соотношение в уравнение Бюргерса (13.1), мы находим затем его первый интеграл  $(u - u_0)^2 - 2\partial u/\partial x = \text{const}$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$u = u_0 - 2a \tanh[a(x - x_0)], \quad (13.8)$$

которое называют шоком. Это решение соответствует тому, что в области ширины  $a^{-1}$  поле  $u$  испытывает скачок  $4a$ . Решение (13.8) дает универсальную форму шок, которые формируются при условии  $UL \gg 1$ , тогда  $a \sim U$ . Заметим, что стационарность этого решения не противоречит сделанному выше утверждению о стремлении  $u$  к нулю на больших временах, поскольку последнее справедливо только для решений, стремящихся к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ , в то время как выражение (13.8) этому условию не удовлетворяет ни при каких значениях параметров.

Уравнение Бюргерса (13.1) является в некотором смысле точно решаемым. А именно, преобразование Коула-Хопфа

$$\Psi = \exp(-h/2), \quad u = \partial h/\partial x \quad (13.9)$$

приводит его к чисто диффузионному уравнению

$$\partial \Psi/\partial t = \partial^2 \Psi/\partial x^2. \quad (13.10)$$

Решение уравнения (13.10) может быть выражено в виде интеграла от начального значения

$$\Psi(t, x) = \int \frac{dy}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-y)^2}{4t}\right] \Psi(0, y). \quad (13.11)$$

Выражение (13.11) может быть использовано для получения ряда точных решений уравнения Бюргерса. Рассмотрим в качестве примера начальное условие  $\Psi(0, x) = \cosh(ax)$ , которое соответствует выражению (13.8) с  $u_0 = x_0 = 0$ . В этом можно убедиться, производя обратное по отношению к (13.9) преобразование

$$u = -2\partial(\ln \Psi)/\partial x. \quad (13.12)$$

Подставляя выражение  $\Psi(0, x) = \cosh(ax)$  в уравнение (13.11) и вычисляя интеграл по  $y$ , мы находим  $\Psi(t, x) = \cosh(ax) \exp(a^2 t)$ . Подставляя это выражение в соотношение (13.12), мы находим то же выражение  $u = -2a \tanh(ax)$ , поскольку дополнительный временной множитель выпадает из ответа. Таким образом, мы другим способом убедились в том, что выражение (13.8) дает стационарное решение уравнения Бюргерса.

**Задача 13.1.** Решение уравнения Хопфа (13.3) с начальными условиями  $u = -c_1 x + c_2 x^3$ , полученное с помощью метода характеристик, можно формально продолжить и на времена  $t > c_1^{-1}$ , что приводит к неоднозначному решению  $u(x)$ . Найти область существования этой неоднозначности и значения функции  $u$  в этой области.

**Задача 13.2.** Найти решение уравнения Хопфа (13.3) с начальными условиями  $u = -c_1 x + c_2 x^2$ .

**Задача 13.3.** Найти решение уравнения (13.6) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая является константой  $f_0$  на интервале  $-x_0 < x < x_0$  и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака  $f_0$ ?

**Задача 13.4.** Найти решение уравнения (13.6) с нулевыми начальными условиями и накачкой, которая равна  $h_0 x$  на интервале  $-x_0 < x < x_0$  и равна нулю вне этого интервала. Как зависит ответ от знака  $h_0$ ?

**Задача 13.5.** Найти решение уравнения (13.10) с начальным условием  $\Psi(0, x) = \cosh(ax) + B \cosh(bx)$ . Вычислить соответствующее поле  $u$ . Проследить, как большой шок “поедает” маленький, считая  $b > a$  и  $B \ll 1$ .

**Задача 13.6.** Найти решение уравнения (13.10) с начальным условием  $\Psi(0, x) = 1 - A \exp(-x^2)$ . Вычислить соответствующее поле  $u$ .

#### 14. УРАВНЕНИЕ КОРТЕВЕГА-ДЕ-ФРИЗА

Как мы уже отмечали, в общем случае решение уравнения Хопфа (13.3) приводит к формированию особенности в поле  $u$  за конечное время, и на больших временах эволюция поля  $u$  в рамках уравнения Хопфа исследована быть не может. В то же время уравнение Бюргера (13.1) дает решение эволюционной задачи для поля  $u$  на всех временах. Это связано с присутствием в уравнении Бюргера дополнительного (по сравнению с уравнением Хопфа) члена со второй производной, наличие которого приводит к устранению особенности в поле  $u$  (к которой приводит уравнение Хопфа). Для одномерной слабо нелинейной звуковой волны член со второй производной представляет диссипацию. В ряде задач более существенным оказывается другой эффект, связанный с дисперсией скорости звука, то есть с ее зависимостью от волнового вектора  $k$ . Этот эффект является бездиссипативным.

Будем считать, что диссипацией звука можно пренебречь, а дисперсия скорости звука существенна. В общем случае скорость звука является некоторой функцией  $k^2$ , при достаточно малых  $k$  первая зависящая от  $k$  поправка к скорости звука пропорциональна  $k^2$ . Это означает, что к уравнению Хопфа (13.3) следует добавить член с третьей производной. В результате получается так называемое уравнение Кортевега де Фриза (Korteweg de Vries), каноническая форма которого записывается, как

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \quad (14.1)$$

Это уравнение сводится к уравнению Хопфа (13.3) в пренебрежение третьей производной и после перемасштабирования поля  $6u \rightarrow u$ .

Уравнение КдФ (Кортевега - де Фриза) имеет, в частности, локализованное решение солитонного типа

$$u(t, x) = \frac{V}{2 \cosh^2 [\kappa(x - Vt - x_0)]}, \quad (14.2)$$

где  $V$  – произвольный параметр. Как следует из (14.2),  $V$  имеет смысл скорости движения солитона. Периодические решения уравнения КдФ являются так называемыми кноидальными волнами, описываемыми интегральными соотношениями:

$$x - ct - x_0 = \int du (2\epsilon + cu^2 - 2u^3)^{-1/2} \quad (14.3)$$

где  $c, \epsilon$  – параметры волны, определяющие её амплитуду и период.

Уравнение Кортевега де Фриза имеет интегралы движения вида

$$I_n = \int dx P_n(u, \partial_x u, \partial_x^2 u \dots), \quad (14.4)$$

где  $P_n$  – полиномы от функции  $u$  и её пространственных производных, в частности:

$$P_0 = u, \quad P_1 = u^2, \quad P_2 = 2u^3 - (\partial u / \partial x)^2, \\ P_3 = 5u^4 + 5u^2 \partial^2 u / \partial x^2 + (\partial^2 u / \partial x^2)^2. \quad (14.5)$$

Поскольку число интегралов движения  $I_n$  бесконечно, говорят, что уравнение КдФ (14.1) является интегрируемым.

Уравнение КдФ (14.1) может быть записано, как условие экстремума действия

$$S = \int dt dx \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial x} + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)^2 \right], \quad (14.6)$$

где, как и для уравнения Бюргера,  $u = \partial_x h$ . В силу однородности этого действия по времени и пространству оно приводит к законам сохранения энергии и импульса (смотри раздел 18 Е), которые вычисляются в соответствии с выражениями (18.33, 18.35). Несложно увидеть, что плотность энергии и импульса совпадают (с точностью до множителя) с выражениями для  $P_2$  и  $P_1$ , соответственно, смотри (14.5). Таким образом, первый не Нётеровский интеграл движения уравнения КдФ определяется  $P_3$ , смотри (14.5).

Уравнение КдФ (14.1) инвариантно относительно “преобразования Галилея”  $u(t, x) \rightarrow v + u(t, x - 6vt)$ , где  $v$  – некоторая константа. Можно проверить, что действие (14.6) инвариантно относительно соответствующего преобразования для  $h$ :  $h(t, x) \rightarrow vx - 2v^2t + h(t, x - 6vt)$ . Инфинитезимальное преобразование для  $h$  имеет вид  $\delta h = vx - 6vt \partial_x h$ . Действуя далее, как и в разделе 18 Е, то есть полагая  $v$  произвольной функцией  $t$  и  $x$ , вычисляя вариацию действия (14.6) и приравнявая ее к нулю, находим закон сохранения

$$\partial_t (xu - 3tu^2) + \partial_x [3xu^2 - \partial_x u + x \partial_x^2 u - 12tu^3 - 6tu \partial_x^2 u + 3t(\partial_x u)^2] = 0.$$

**Задача 14.1.** Найти  $\partial_t P_3$ , где  $P_3$  определяется (14.5), в соответствии с уравнением КдФ (14.1) и убедиться, что результат сводится к полной производной по  $x$ .

#### 15. УРАВНЕНИЕ СИНУС-ГОРДОН

Уравнением синус-Гордон называют уравнение

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + \sin \varphi = 0. \quad (15.1)$$

Такого сорта уравнение возникает для динамики систем, которые описываются переменной  $\varphi$ , которая

имеет смысл фазы некоторой величины и, соответственно, однозначно определена на интервале от 0 до  $2\pi$ . Удобно, однако, считать, что  $\varphi$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$  с тем, чтобы избежать скачков  $\varphi$ . При этом состояния системы, отличающиеся на  $2\pi n$  ( $n$  – целое число) физически эквивалентны.

Уравнение синус-Гордон (15.1), как и КдФ, приводит к бесконечному набору законов сохранения. Поэтому оно относится к интегрируемым уравнениям.

Примером физической системы, описываемой уравнением (15.1), являются проводящие одномерные цепочки, в которых при достаточно низких температурах возникает так называемая волна зарядовой плотности. Эта волна характеризуется фазой  $\varphi$ , с вариациями которой связана так называемая Фрѐлиховская мода, которая описывается уравнением (15.1), при подходящем выборе единиц измерения времени  $t$  и координаты  $x$  вдоль цепочки.

При небольших вариациях фазы,  $|\varphi| \ll 1$ , мы можем заменить в уравнении (15.1)  $\sin \varphi$  на  $\varphi$ . В результате мы получаем линейное уравнение, которое описывает совокупность распространяющихся мод. Делая Фурье-преобразование по времени и пространству, мы приходим для данной Фурье-компоненты к соотношению  $\omega^2 = q^2 + 1$ , где  $\omega$  – частота, а  $q$  – волновой вектор. Таким образом, частота  $\omega$  не может быть меньше единицы. В то же время групповая скорость  $\partial\omega/\partial q = q/\sqrt{q^2 + 1}$  стремится к нулю при уменьшении волнового вектора  $q$ .

Рассмотренные выше колебания относятся к малым вариациям около стационарного состояния  $\varphi = 0$  (или  $\varphi = 2\pi n$ ). В то же время уравнение (15.1) имеет, очевидно, еще одно стационарное решение  $\varphi = \pi$ . Оно является, однако, абсолютно неустойчивым. Для доказательства этого утверждения рассмотрим малые отклонения от этого состояния, которые описываются малой фазой  $\phi$ :  $\varphi = \pi + \phi$ . В линейном по  $\phi$  приближении уравнение (15.1) дает

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi - \phi = 0. \quad (15.2)$$

Переходя теперь к Фурье-представлению, мы находим  $\omega = \pm\sqrt{q^2 - 1}$ . Таким образом, при  $q < 1$  частота является чисто мнимой, и множитель  $\exp(-i\omega t)$  экспоненциально растет со временем (для соответствующего знака квадратного корня). Это означает, что даже исходно малые возмущения стационарного состояния  $\varphi = \pi$  станут со временем большими и разрушат это состояние.

Помимо тривиальных однородных стационарных решений уравнение (15.1) допускает широкий набор неоднородных стационарных решений, существование которых формально связано с неоднозначностью фазы  $\varphi$ . Рассмотрим простейшее такое решение, которое характеризуется предельным поведением  $\varphi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$  и  $\varphi \rightarrow 2\pi$  при  $x \rightarrow +\infty$ . Стационарное условие  $-\partial_x^2 \varphi + \sin \varphi = 0$  имеет вид уравнения Ньютона для (перевернутого) физического маятника и имеет, очевидно, первый интеграл  $(\partial_x \varphi)^2/2 + \cos \varphi$ , который

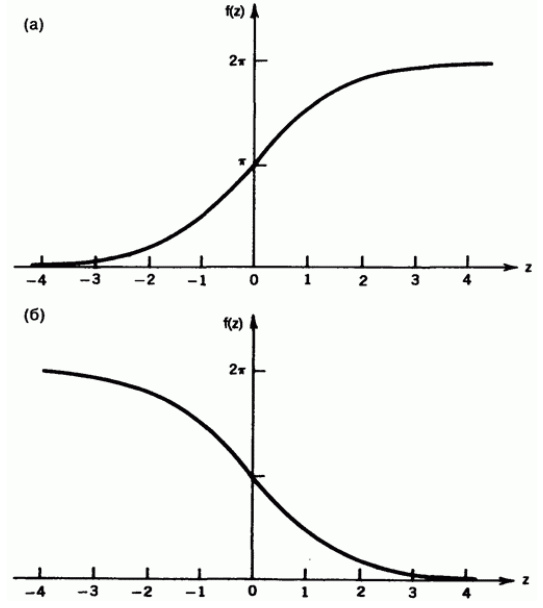


Рис. 10. Кинк и антикинк.

в силу граничных условий надо приравнять к единице.

В результате мы приходим к уравнению  $\partial_x \varphi = 2 \sin(\varphi/2)$ , которое имеет решение

$$\varphi = 4 \arctan [\exp(x - x_0)], \quad (15.3)$$

где  $x_0$  – произвольная константа. Решение (15.3) называют кинком, а  $x_0$  является положением кинка. Из выражения (15.3) следует, что фаза  $\varphi$  меняется от 0 до  $2\pi$  в окрестности порядка единицы около  $x_0$ , а вне ее экспоненциально быстро стремится к своим предельным значениям, смотри рисунок 10. Легко найти решение (антикинк), которое соответствует убыванию фазы  $\varphi$  от  $2\pi$  до 0:

$$\varphi = 2\pi - 4 \arctan [\exp(x - x_0)],$$

смотри рисунок 10.

Помимо простейшего решения (15.3), уравнение (15.1) допускает и более сложные стационарные решения. Например, бесконечный набор кинков. Для того, чтобы найти это решение, мы можем воспользоваться тем же первым интегралом  $(\partial_x \varphi)^2/2 + \cos \varphi$ , который теперь мы приравняем к  $1 + \epsilon$ . Тогда мы придем к уравнению

$$\partial_x \varphi = \sqrt{2\epsilon + 4 \sin^2(\varphi/2)}, \quad (15.4)$$

которое описывает монотонно растущую при увеличении  $x$  фазу  $\varphi$ . Если  $\epsilon$  мало, то это решение соответствует бесконечной совокупности кинков, разделенных расстоянием  $\ln(1/\epsilon)$  (что справедливо, если этот логарифм является большой величиной). Если в выражении (15.4) взять отрицательный знак перед корнем, то мы получим решение с монотонно убывающей фазой.

До сих пор мы рассматривали неподвижный кинк. Но уравнение (15.1) допускает решения и в виде движущегося кинка. Чтобы найти его профиль для скорости движения  $v$ , можно подставить в уравнение (15.1) общее выражение для равномерно движущегося локализованного объекта  $\varphi = f(x - vt)$  и провести те же вычисления. Однако ответ можно выписать и безо всяких вычислений, воспользовавшись тем, что уравнение (15.1) является “релятивистки инвариантным”, и потому решение для движущегося со скоростью  $v$  кинка может быть получено из выражения (15.3) преобразованием Лоренца. В результате получаем

$$\varphi = 4 \arctan \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right]. \quad (15.5)$$

Отсюда следует, в частности, что кинк не может двигаться со скоростью больше единицы. Аналогичным образом может быть найдено решение для движущегося антикинка:

$$\varphi = 2\pi - 4 \arctan \left[ \exp \left( \frac{x - x_0 - vt}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right].$$

Уравнение синус-Гордон относится к классу уравнений, которые могут быть проанализированы в рамках метода обратной задачи рассеяния, который позволяет найти серию гораздо более сложных решений уравнения (15.1), чем приведенные выше решения для одиночных движущихся кинков и антикинков. Эти решения представляют собой системы движущихся с различными скоростями кинков и антикинков, которые в силу различных скоростей движения время от времени сталкиваются между собой. Замечательно, что после такого столкновения кинки расходятся и продолжают двигаться с теми же скоростями, что и до столкновения. При этом не происходит никакого излучения волн, обсуждавшихся выше.

Приведем решение, которое называют бризером (breather)

$$\varphi = 4 \arctan \left[ \tan \theta \frac{\sin(t \cos \theta)}{\cosh(x \sin \theta)} \right]. \quad (15.6)$$

Проверка выполнения уравнения (15.1) для функции (15.6) осуществляется прямым вычислением производных от выражения (15.6). Решение (15.6) соответствует связанному состоянию кинка и антикинка, расстояние между которыми осциллирует со временем. Это решение описывает поле  $\varphi$ , центр тяжести которого покоится. Сделав преобразование Лоренца, легко получить поле  $\varphi$  для бризера, движущегося с произвольной скоростью  $v < 1$ .

Переходя в выражении (15.6) к пределу  $\theta \rightarrow \pi/2$ , находим следующее решение уравнения (15.1)

$$\varphi = 4 \arctan \frac{t}{\cosh x}. \quad (15.7)$$

Решение (15.7) описывает сближение кинка и антикинка с их последующим расхождением. При  $t = 0$  мы

имеем  $\varphi = 0$ , однако скорость изменения поля  $\partial_t \varphi$  нулю не равна, она сосредоточена на расстояниях порядка единицы от начала координат. При  $t \gg 1$  размер решения (15.7) оценивается, как  $\ln t$ . Эта величина имеет смысл расстояния между кинком и антикинком. Понятно, что начало координат и начало отсчета времени могут быть выбраны произвольно, то есть (15.7) остается решением при замене  $t \rightarrow t - t_0$ ,  $x \rightarrow x - x_0$ .

Уравнение (15.1) может быть получено, как условие экстремума действия

$$S = \int dt dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 + \cos \varphi \right]. \quad (15.8)$$

Таким образом, в соответствии с разделом (18Е) мы находим следующие интегралы движения, имеющие смысл энергии и импульса системы

$$E = \int dx \left[ \frac{1}{2} (\partial_t \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_x \varphi)^2 - \cos \varphi + 1 \right], \quad (15.9)$$

$$P = \int dx \partial_t \varphi \partial_x \varphi, \quad (15.10)$$

смотри (18.33, 18.35).

Уравнение (15.1) может быть переписано в терминах переменных вдоль “светового конуса”  $\xi = (x+t)/2$ ,  $\tau = (x-t)/2$ :

$$\partial_\tau \partial_\xi \varphi = \sin \varphi, \quad (15.11)$$

поскольку  $\partial_\xi = \partial_x + \partial_t$ ,  $\partial_\tau = \partial_x - \partial_t$ . Бесконечный набор законов сохранения удобно формулировать именно в терминах переменных  $\xi$  и  $\tau$ . Первый нетривиальный закон сохранения имеет вид

$$\partial_\tau [(\partial_\xi \varphi)^4 - 4(\partial_\xi^2 \varphi)^2] + 4\partial_\xi [(\partial_\xi \varphi)^2 \cos \varphi] = 0,$$

который легко проверяется, исходя из (15.11).

**Задача 15.1.** *Линеаризуя уравнение (15.1) на фоне какого-либо его решения  $\varphi$ , мы находим для возмущения  $\phi$  уравнение  $\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + \phi \cos \varphi = 0$ . Имеет ли это уравнение локализованные решения  $\phi$  на фоне кинка (15.3)?*

**Задача 15.2.** *Найти энергию и импульс кинка (15.3) и решения (15.7).*

**Задача 15.3.** *Найти закон сохранения, который соответствует Лоренц-инвариантности уравнения синус-Гордон (15.1).*

**Задача 15.4.** *Записать законы сохранения энергии и импульса в терминах переменных  $\xi$  и  $\tau$ . Указание: воспользоваться выражением для действия в терминах  $\xi$  и  $\tau$ .*

## 16. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА

Нелинейное уравнение Шрёдингера (НУШ) описывает эволюцию волновых пакетов электромагнитных волн, звуковых волн, плазменных колебаний, волн на поверхности воды и так далее. НУШ относится к универсальным волновым уравнениям, в случае одного пространственного измерения оно имеет вид:

$$i\partial_t\psi + \beta\partial_x^2\psi + \alpha|\psi|^2\psi = 0. \quad (16.1)$$

Здесь  $\psi$  – так называемая огибающая изучаемого поля,  $\alpha, \beta$  – некоторые постоянные,  $t$  и  $x$  играют роль времени и расстояния. В случае пространства произвольной размерности  $\partial_x^2$  в (16.1) следует заменить на лапласиан. Уравнение (16.1) возникает при описании динамики квази-монохроматических волновых пакетов и учитывает слабую нелинейность и дисперсию, то есть зависимость скорости распространения волны от волнового вектора и амплитуды волны.

Приведем вывод уравнения (16.1), которое справедливо для однородной среды и в пренебрежение затуханием. В этом случае плоская монохроматическая волна для любого волнового процесса характеризуется частотой  $\omega$ , которая зависит от волнового вектора  $k$  волны и от ее амплитуды. Пусть в такой среде создан волновой пакет, который содержит частоты, слабо отличающиеся от  $k_0$ . Иными словами, в эволюции участвует узкая область  $k$ -пространства вблизи  $k_0$ . В этом случае (и с учетом слабой нелинейности) соотношение между частотой, волновым вектором и амплитудой можно записать в явном виде:

$$\omega = \omega_0 + u_0(k - k_0) + \beta(k - k_0)^2 + \alpha|\psi|^2, \quad (16.2)$$

где  $\nu$  – частота монохроматической волны малой амплитуды с волновым вектором  $k_0$ . Параметр  $\alpha$  можно считать независимым от  $k$ , поскольку учет этой зависимости даст лишь малые поправки к НУШ.

В пространственно-временном представлении волновой пакет представляет собой медленно промодулированную плоскую волну, то есть волну с амплитудой  $\text{Re}[\psi(t, x) \exp(ik_0x - i\omega_0t)]$ , где огибающая  $\psi(t, x)$  медленно меняется в пространстве и времени. Эта медленность означает, что характерная длина, на которой меняется  $\psi$ , много больше  $k_0^{-1}$ , а характерное время изменения  $\psi$  много больше  $\omega_0^{-1}$ . Переходя к пространственно-временному описанию волны, мы должны заменить  $\omega \rightarrow i\partial_t$ ,  $k \rightarrow -i\partial_x$ , что дает следующее уравнение эволюции для амплитуды волны

$$\begin{aligned} & i\partial_t [\psi(t, x) \exp(ik_0x - i\omega_0t)] \\ & = \left[ \omega_0 + u_0(-i\partial_x - k_0) + \beta(-i\partial_x - k_0)^2 + \alpha|\psi|^2 \right] \\ & \quad [\psi(t, x) \exp(ik_0x - i\omega_0t)]. \end{aligned}$$

Исключение экспоненты  $\exp(ik_0x - i\omega_0t)$  и переход в систему отсчета, движущуюся с групповой скоростью

$u_0$ :  $x \rightarrow x + u_0t$ ,  $\partial_t \rightarrow \partial_t - u_0\partial_x$ , приводит данное уравнение к виду (16.1) для огибающей  $\psi$ .

В последние десятилетия НУШ приобрело большое прикладное значение для оптоволоконных линий связи. В этом случае  $\psi(t, x)$  является огибающей электрического поля в оптическом импульсе:

$$E(t, x) = \text{Re} [e \psi(t, x) \exp(ik_0x - i\omega_0t)].$$

Здесь  $x$  – координата вдоль волокна, а  $e$  – поляризация электрического поля. НУШ получается для распространяющихся вдоль волокна волновых пакетов в пренебрежение затуханием или после усреднения по масштабам большим по сравнению с расстоянием между усилителями, которые компенсируют затухание.

Если волновой пакет распространяется в трехмерной среде, то он обычно не является строго одномерным, то есть огибающая  $\psi$  зависит не только от координаты  $x$  вдоль направления распространения пакета, но и от поперечных координат  $y$  и  $z$ . В этом случае возникает распыление волнового пакета в поперечном направлении, которое учитывается добавлением в правую часть (16.1) слагаемого  $\propto -(\partial_y^2 + \partial_z^2)$ . Формально его можно получить, если учесть зависимость частоты волны  $\omega$  от поперечной компоненты волнового вектора:  $\omega(k) \approx \omega(k_x) + u(k_y^2 + k_z^2)/(2k)$ , где  $u = \partial\omega/\partial k$  – групповая скорость. (Это соотношение справедливо для изотропной среды, но и для анизотропной среды можно получить нечто подобное.) Выбирая подходящий масштаб по координатам  $x$  и  $y$ , можно добиться того, чтобы в НУШ возник Лапласиан.

Изменяя масштабы измерения времени и координаты, можно менять соотношения между коэффициентами при нелинейном и дисперсионном слагаемых НУШ, но не их относительный знак. Поэтому НУШ может быть приведено к двум каноническим типам:

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi + 2|\psi|^2\psi = 0 \quad (16.3)$$

и

$$i\partial_t\psi + \Delta\psi - 2|\psi|^2\psi = 0. \quad (16.4)$$

Мы видим, что оба этих уравнения имеют вид квантово-механического уравнения Шрёдингера с потенциалом, пропорциональным  $-2|\psi|^2$  в случае (16.3) и  $+2|\psi|^2$  для (16.4). Поскольку знак  $-2|\psi|^2$  соответствует притягивающему потенциалу, то этот случай называется ‘НУШ с притяжением’, и, соответственно, (16.4) – ‘НУШ с отталкиванием’. Как мы знаем из квантовой механики, волновые функции в притягивающих и отталкивающих потенциалах имеют качественно разные свойства. Поэтому и решения уравнений (16.3) и (16.4) отличаются радикальным образом. Самые интересные эффекты возникают в притягивающем случае (16.3), который, к тому же, обычно реализуется в оптических приложениях. Поэтому в дальнейшем мы сосредоточимся именно на нем.



Нелинейное уравнение Шрёдингера (16.3) является следствием вариационного принципа. А именно, оно получается, как экстремум ‘действия’

$$S = \int dt d\mathbf{r} L, \quad (16.5)$$

$$L = -i\psi^* \partial_t \psi + \nabla \psi^* \nabla \psi - |\psi|^4.$$

При вариации  $S$  удобно рассматривать поля  $\psi$  и  $\psi^*$ , как независимые динамические переменные, что возможно в силу того, что  $\psi$  имеет две степени свободы.

НУШ ведет к законам сохранения ряда величин, которые связаны с общими симметриями этого уравнения: инвариантностью по отношению к сдвигу фазы  $\psi$ , а также по отношению к сдвигу начала отсчета времени и начала координат, смотри раздел 18 Е. Соответствующими интегралами движения при произвольном числе измерений для локализованных в пространстве решений являются ‘число частиц’  $N$ , ‘энергия’  $E$  и ‘импульс’  $\mathbf{P}$ . Выражения для этих (Нётеровских) интегралов движения

$$N = \int d\mathbf{r} |\psi|^2, \quad (16.6)$$

$$E = \int d\mathbf{r} (|\nabla \psi|^2 + |\psi|^4), \quad (16.7)$$

$$\mathbf{P} = -i \int d\mathbf{r} \psi^* \nabla \psi, \quad (16.8)$$

могут быть получены в рамках общей процедуры из Лагранжиана (16.5), смотри выражения (18.33, 18.35, 18.38). НУШ (16.3) ведет к соотношениям  $dN/dt = 0$ ,  $dE/dt = 0$ ,  $d\mathbf{P}/dt = 0$ .

Для нелинейного уравнения Шрёдингера имеется замечательное соотношение – теорема Таланова, позволяющее сделать качественные выводы о поведении решений НУШ для широкого класса начальных условий. Для вывода теоремы Таланова рассмотрим функционал

$$I = \int d\mathbf{r} r^2 |\psi|^2. \quad (16.9)$$

Для пакета, центрированного вокруг начала координат, этот функционал можно оценить, как  $I \sim NR^2$ , где  $R$  – размер пакета. Для интеграла (16.9) имеет место соотношение

$$\frac{d^2}{dt^2} I = 8 \int d\mathbf{r} \left( |\nabla \psi|^2 - \frac{D}{2} |\psi|^4 \right), \quad (16.10)$$

которое является следствием уравнения (16.3). Здесь  $D$  – размерность пространства.

В двумерном пространстве в правой части (16.10) возникает выражение:

$$\frac{d^2}{dt^2} I = -8E, \quad D = 2. \quad (16.11)$$

Поскольку  $E$  не зависит от времени, то общее решение уравнения (16.11) легко выписывается:

$$I(t) = I(0) + Ct - 4Et^2, \quad D = 2, \quad (16.12)$$

где константы  $C$  и  $E$  определяются начальными условиями. Пусть они таковы, что  $E > 0$ . Тогда при любых конечных  $I(0)$  и  $C$  наступит такой момент времени  $t_*$ , что  $I(t_*) = 0$ . Из явного вида  $I(t)$  следует, что волновой пакет в момент  $t = t_*$  сожмется в точку. Сохранение числа частиц  $N$  влечет за собой сингулярность  $\psi$  в этот момент:  $|\psi|^2(\mathbf{r} \rightarrow 0, t \rightarrow t_*) \rightarrow \infty$ . Таким образом, в двух измерениях при  $E > 0$  происходит коллапс – явление, в нелинейной оптике называемое самофокусировкой светового пучка. Коллапс может произойти и при  $E < 0$ , однако при  $E > 0$  он неизбежен. Физическая сингулярность может произойти в точке, отличной от  $\mathbf{r} = 0$ , в момент времени более ранний, чем  $t = t_*$ . То, что мы сейчас показали, означает, что на временном интервале  $t \leq t_*$  коллапс при  $E > 0$  в какой-нибудь точке пространства обязательно произойдет.

В трехмерном пространстве уравнение (16.10) для  $I(t)$  приводит к неравенству:

$$\frac{d^2}{dt^2} I = -8E - 4 \int d\mathbf{r} |\psi|^4 < -8E. \quad (16.13)$$

Поэтому вместо равенства (16.12) мы приходим к неравенству

$$I(t) < I(0) + Ct - 4Et^2, \quad D = 3. \quad (16.14)$$

Это неравенство по-прежнему означает неизбежность коллапса при  $E > 0$ .

Здесь необходимо уточнение: разумеется, коллапс не может происходить во всех точках пространства, обращение  $\psi$  в бесконечность происходит в одной точке. Чтобы найти момент времени  $t_*$ , когда происходит коллапс, рассмотрим модифицированный функционал Таланова:

$$I_{\mathbf{a}}(t) = \int d\mathbf{r} (\mathbf{r} - \mathbf{a})^2 |\psi|^2. \quad (16.15)$$

Непосредственным дифференцированием с использованием уравнения эволюции и закона сохранения импульса находим  $d^2 I_{\mathbf{a}}/dt^2 = d^2 I/dt^2$ . Поэтому и для функционала  $I_{\mathbf{a}}(t)$  при  $E > 0$  также справедливо утверждение об обращении его в ноль в некоторый момент времени, то есть, о коллапсе. Момент же  $t_*$  обращения  $I_{\mathbf{a}}(t)$  в ноль при данных начальных условиях зависит от  $\mathbf{a}$ . Место и момент коллапса будут определяться таким  $\mathbf{a}$ , при котором  $t_*$  будет наименьшим. Отметим, что мы фактически показали, что такая точка пространства и момент времени, где решение становится сингулярным, существуют.

Ситуация качественно отличается в одномерном случае. Тогда соотношение Таланова (16.10) принимает вид:

$$\frac{d^2}{dt^2} I = -4E + 4 \int dx |\nabla \psi|^2, \quad (16.16)$$

что означает невозможность коллапса. Действительно, если характерный размер пакета  $R(t)$  уменьшается, то сохранение числа частиц  $N$  требует, чтобы квадрат модуля амплитуды пакета рос как  $|\psi|^2 \sim R^{-1}(t)$ .

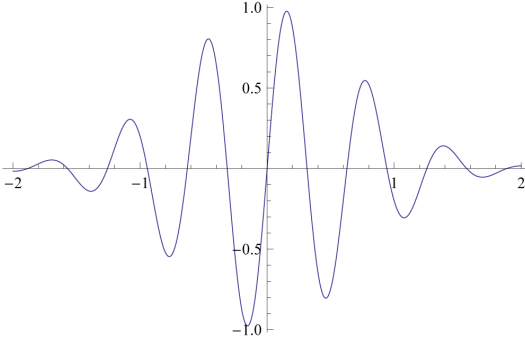


Рис. 11. Мнимая часть  $\psi$  для односолитонного решения.

При этом положительная добавка в правой части в (16.16) также растет:

$$\int dx |\nabla\psi|^2 \sim NR^{-2}.$$

При уменьшении  $R$  эта величина неизбежно становится по абсолютной величине больше отрицательного, но постоянного  $-E$ . Это приведет к стабилизации поля  $\psi$ . Таким образом, при достаточно большой амплитуде начального значения  $\psi$  возникнут локализованные объекты, называемые солитонами.

Мы начнем с простейшего случая покоящегося солитона. Будем искать локализованное в пространстве решение уравнения (16.3) в виде

$$\psi(t, x) = e^{i\eta^2(t-t_0)} g(x). \quad (16.17)$$

Уравнение на функцию  $g(x)$  имеет вид  $g'' + 2g^3 - \eta^2 g = 0$ , что является уравнением Ньютона в стационарном потенциале и поэтому его порядок может быть понижен в силу сохранения энергии. Умножая уравнение для  $g$  на  $g'$  и интегрируя по  $x$ , мы получаем

$$g' = -g\sqrt{\eta^2 - g^2}, \quad \int_g^\eta \frac{dg}{g\sqrt{\eta^2 - g^2}} = x - x_0. \quad (16.18)$$

Здесь  $x_0$  – константа интегрирования, знак минус для корня выбран для убывания  $g$  с ростом  $|x|$ . Первообразная в (16.18) с помощью замены  $g = \eta/u$  приводится к табличной и мы приходим к трехпараметрическому семейству решений:

$$\psi(t, x) = e^{i\eta^2(t-t_0)} \frac{\eta}{\cosh[\eta(x-x_0)]}. \quad (16.19)$$

Теперь заметим, что уравнение (16.3) инвариантно относительно преобразования Галилея. А именно, если  $\psi(t, x)$  – решение (16.3), то

$$\psi(t, x - \beta t) e^{i\beta x - i\beta^2 t} \quad (16.20)$$

также будет решением НУШ. Применяя это преобразование к (16.19), мы получим семейство односолитонных решений, зависящее от четырех параметров

$t_0, x_0, \eta, \beta$ . При  $x_0 = t_0 = 0$  это решение имеет вид

$$\psi(t, x) = \frac{\eta}{\cosh[\eta(x - \beta t)]} \exp[i(\eta^2 - \beta^2)t + i\beta x]. \quad (16.21)$$

Зависимость мнимой части решения (16.21) от  $x$  при  $t = 0$  приведено на рисунке 11.

В одномерном пространстве НУШ является “интегрируемым”. Это означает, что помимо стандартных (Нётеровских) интегралов движения, НУШ ведет к дополнительному бесконечному набору интегралов движения. Первым представителем этого набора является

$$R = \int dx \left[ \partial_x \psi^* \partial_x^2 \psi - \frac{3}{2} (\psi^*)^2 \partial_x (\psi^2) \right]. \quad (16.22)$$

Интеграл (16.22) уже не связан с пространственно-временными или фазовой симметриями уравнения, его сохранение является следствием интегрируемости одномерного НУШ.

**Задача 16.1.** Проверить непосредственно законы сохранения интегралов (16.6, 16.7, 16.8), исходя из уравнения (16.3).

**Задача 16.2.** Вычислить значения Нётеровских интегралов движения  $N, E, P$  в одном измерении для движущегося солитона:

$$\psi(t, x) = \frac{\eta}{\cosh[\eta(x - \beta t)]} e^{i(\eta^2 - \beta^2)t + i\beta x}.$$

**Задача 16.3.** Вывести соотношение Таланова (16.10).

**Задача 16.4.** Доказать, что

$$\frac{d}{dt} I_a = \frac{d}{dt} I - 4aP.$$

Здесь  $I_a$  – модифицированный функционал Таланова (16.15).

**Задача 16.5.** Показать, что выражение (16.22) является интегралом движения НУШ.

## 17. ОТДЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

### А. $\delta$ -функция Дирака

Здесь мы рассматриваем основные свойства  $\delta$ -функции Дирака  $\delta(t)$ . ‘Физическое’ определение  $\delta$ -функции состоит в том, что она равна нулю для всех  $t \neq 0$ , равна бесконечности при  $t = 0$ , а интеграл от нее равен единице:  $\int dt \delta(t) = 1$ . Эту функцию можно представить себе, как предел некоторой последовательности функций, которые стремятся к указанным

свойствам. Например,  $\delta$ -функцию можно записать в виде предела

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{t^2 + \epsilon^2}. \quad (17.1)$$

Действительно, при любом положительном  $\epsilon$  интеграл от функции в правой части (17.1) равен единице, при  $t \neq 0$  правая часть (17.1) стремится к нулю, а при  $t = 0$  — к бесконечности при стремлении  $\epsilon$  к нулю.

Поскольку значение  $\delta(t)$  отлично от нуля только при  $t = 0$ , то для любой непрерывной функции  $f(t)$  справедливо соотношение  $\delta(t)f(t) = \delta(t)f(0)$ . Или, обобщая,  $\delta(t-s)f(t) = \delta(t-s)f(s)$ . Отсюда следует важное свойство  $\delta$ -функции:

$$\int dt \delta(t-s)f(t) = f(s). \quad (17.2)$$

Важным частным случаем соотношения (17.2) является

$$\int dt \delta(t) \exp(i\omega t) = 1. \quad (17.3)$$

Это соотношение можно рассматривать, как прямое преобразование Фурье от  $\delta$ -функции. Тогда обратное преобразование Фурье дает следующее интегральное представление для  $\delta$ -функции

$$\delta(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t). \quad (17.4)$$

Из основных свойств  $\delta$ -функции следует, что  $\int dt \delta(t) = 1$  при интегрировании по любому интервалу, который включает точку  $t = 0$ . Поэтому

$$\int_{-\infty}^s dt \delta(t) = \theta(s), \quad (17.5)$$

$$\theta(s) = 0 \text{ if } s < 0, \quad \theta(s) = 1 \text{ if } s > 0.$$

Функция  $\theta(t)$  называется ступенчатой функцией или функцией Хэвисайда. Таким образом, мы нашли первообразную  $\delta$ -функции. Дифференцируя по  $s$  соотношение (17.5), мы находим  $\theta'(t) = \delta(t)$ . Можно ввести не только первообразную, но и производную от  $\delta$ -функции,  $\delta'(t)$ . Правила обращения с этим объектом следуют из соотношения (17.2). А именно, интегрируя по частям, находим для произвольной гладкой функции  $f$

$$\int dt \delta'(t-s)f(t) = -f'(s). \quad (17.6)$$

Подставляя в соотношение (17.6)  $f(t) = (t-s)g(t)$  и сравнив результат с соотношением (17.2), мы заключаем, что  $t\delta'(t) = -\delta(t)$ . Раскладывая теперь  $f(t)$  в ряд Тейлора (до первого порядка) вблизи точки  $t = s$  и используя указанное соотношение, мы находим

$$f(t)\delta'(t-s) = f(s)\delta'(t-s) - f'(s)\delta(t-s). \quad (17.7)$$

Обратим внимание на то, что из соотношения (17.7) следует, что  $f(t)\delta'(t-s) \neq f(s)\delta'(t-s)$ .

До сих пор мы неявно подразумевали, что функция  $f$  и ее производная являются непрерывными функциями. Если же функция испытывает в некоторой точке скачок или излом, то надо быть аккуратным при обращении с ее производными (возникающими, в частности, при интегрировании по частям). Примером такой функции, рассмотренной выше, является разрывная функция Хэвисайда, производная которой сводится к  $\delta$ -функции. Обобщая это наблюдение, мы заключаем, что если функция  $f(t)$  испытывает скачок в точке  $s$ , то

$$f'(t) = [f(s+0) - f(s-0)]\delta(t-s) + g(t), \quad (17.8)$$

где функция  $g(t)$  ограничена вблизи точки  $t = s$ . Здесь  $f(s-0)$  и  $f(s+0)$  — значения функции  $f(t)$  слева и справа от точки разрыва, то есть  $f(s+0) - f(s-0)$  — скачок функции на разрыве. Подобным же образом анализируется функция  $f(t)$ , испытывающая в некоторой точке излом, который соответствует скачку первой производной. Тогда  $\delta$ -функциональный вклад возникает во второй производной от функции  $f(t)$ .

**Задача 17.1.** Доказать соотношение

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2x^2\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)^2}, \\ \delta(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{\epsilon}\right), \\ \delta'(x) &= -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{2x\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)^2}, \\ \delta(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(nx)}{\pi nx^2}. \end{aligned}$$

**Задача 17.2.** Получить соотношение (17.3) предельным переходом  $\epsilon \rightarrow 0$  с использованием представления (17.1).

**Задача 17.3.** Выразить  $t\delta''(t)$  через  $\delta'(t)$ .

**Задача 17.4.** Доказать соотношение

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - \gamma^2\right) \exp(-\gamma|t|) = -2\gamma\delta(t).$$

**Задача 17.5.** Доказать соотношение

$$\delta[f(t)] = \sum_n \frac{1}{|f'(s_n)|} \delta(x - s_n),$$

где суммирование идет по всем точкам  $s_n$ , в которых функция  $f(t)$  обращается в ноль. Указание: воспользоваться формулой для дифференцирования сложной функции и основным свойством  $\delta$ -функции (17.2).

## В. Преобразование Фурье

Любую функцию  $f(\mathbf{x})$ , заданную в  $d$ -мерном пространстве, и стремящуюся к нулю на бесконечности, можно разложить в интеграл Фурье:

$$f(\mathbf{x}) = \int \frac{dq_1 dq_2 \dots dq_d}{(2\pi)^d} \exp(i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{f}(\mathbf{q}), \quad (17.9)$$

где  $\tilde{f}(\mathbf{q})$  называется преобразованием Фурье функции  $f(\mathbf{x})$ . Эту величину можно вычислить в соответствии с правилом

$$\tilde{f}(\mathbf{q}) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_d \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{x}) f(\mathbf{x}). \quad (17.10)$$

Преобразования (17.9) и (17.10) являются обратными друг другу. Из выражения (17.10) следует, что преобразование Фурье действительной функции  $f(\mathbf{x})$  удовлетворяет соотношению  $\tilde{f}(-\mathbf{q}) = \tilde{f}^*(\mathbf{q})$ .

Приведем важное соотношение, касающееся так называемой свертки двух функций

$$h(\mathbf{y}) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_d f(\mathbf{x}) g(\mathbf{y} - \mathbf{x}). \quad (17.11)$$

Подставляя выражение (17.11) в интеграл Фурье (17.10) и переходя к интегрированию по  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y} - \mathbf{x}$ , мы находим

$$\tilde{h}(\mathbf{q}) = \tilde{f}(\mathbf{q}) \tilde{g}(\mathbf{q}). \quad (17.12)$$

Таким образом, свертке в обычном пространстве соответствует простое произведение в Фурье-представлении.

Отметим, что для  $\delta$ -функции,  $\delta(\mathbf{x}) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\dots\delta(x_d)$ , преобразованием Фурье является единица,  $\tilde{\delta} = 1$ . Это свойство является прямым обобщением соотношений (17.3,17.4). Отметим также обобщение на  $d$ -мерный случай соотношения (17.2)

$$f(\mathbf{y}) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_d \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}) f(\mathbf{x}). \quad (17.13)$$

Используя теперь соотношения (17.11,17.12), мы возвращаемся к  $\tilde{\delta} = 1$ . Это объясняет эффективность вычисления Гриновских функций переходом к Фурье-представлению.

При учете зависимости функции  $f$  от времени  $t$  в преобразование Фурье можно включить также и время. Мы будем делать это следующим образом

$$\tilde{f}(\omega, \mathbf{q}) = \int dt d\mathbf{x} \exp(i\omega t - i\mathbf{q}\mathbf{x}) f(t, \mathbf{x}) \quad (17.14)$$

$$f(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d\omega d\mathbf{q}}{(2\pi)^{d+1}} \exp(-i\omega t + i\mathbf{q}\mathbf{x}) \tilde{f}(\omega, \mathbf{q}) \quad (17.15)$$

где  $d$  – размерность пространства,  $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_d$ ,  $d\mathbf{q} = dq_1 dq_2 \dots dq_d$ . Обратим внимание на то, что время  $t$  входит в преобразования (17.14,17.15) с обратным по сравнению с пространственными координатами знаком.

Рассмотрим теперь двумерное пространство  $d = 2$  и изучим функцию  $f$ , зависящую только от радиус-вектора  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ . В этом случае  $f$  будет зависеть только от  $q = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$ . Переходя теперь в соотношениях (17.9,17.10) к интегрированию по полярным координатам  $r, \varphi$  и  $q, \phi$ , мы получаем

$$f(r) = \int \frac{dq q d\phi}{(2\pi)^2} \exp[iqr \cos(\varphi - \phi)] \tilde{f}(q),$$

$$\tilde{f}(q) = \int dr r d\varphi \exp[-iqr \cos(\varphi - \phi)] f(r).$$

Используя теперь соотношение (9.9), мы находим

$$f(r) = \int dq q J_0(qr) \tilde{f}(q), \quad (17.16)$$

$$\tilde{f}(q) = \int dr r J_0(qr) f(r). \quad (17.17)$$

где  $J_0$  – функция Бесселя нулевого порядка, а  $\tilde{f} = f/(2\pi)$ . Соотношения (17.16,17.17) являются следствием и модификацией преобразования Фурье. Аналогичные соотношения можно получить для функций Бесселя ненулевого порядка.

Помимо разложения в интеграл Фурье (17.9), в математической физике широко используется разложение в ряд Фурье, которое справедливо для периодических функций или функций, заданных на конечном интервале. Мы сосредоточимся на одномерном случае, поскольку обобщение приведенных соотношений на многомерный случай, как правило, не представляет труда. Отметим, что представление функций в виде ряда Фурье является ведущим способом, который используется при организации сложного численного моделирования.

Мы будем иметь дело с периодической функцией, период которой мы обозначим  $L$  или с функцией, заданной на конечном интервале  $0 < x < L$ . (Этого всегда можно добиться сдвигом начала координат.) Тогда функция  $f(x)$  раскладывается в следующий ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n \exp(2\pi i n x / L), \quad (17.18)$$

где  $n$  – целые числа, пробегающие от минус до плюс бесконечности. Ряд (17.18) задает некоторую периодическую с периодом  $L$  функцию, которая определена при произвольных  $x$ . Таким образом, если исследуется функция, заданная на интервале  $0 < x < L$ , то ряд Фурье (17.18) задает, как говорят, ее периодическое продолжение на всю действительную ось. Обратим внимание на то, что это периодическое продолжение имеет, вообще говоря, разрывы в точках  $x_n = nL$ .

Обратное к (17.18) преобразование имеет вид

$$f_n = \int_0^L \frac{dx}{L} \exp(-2\pi i n x / L) f(x). \quad (17.19)$$

Отсюда следует, что для действительной функции  $f(x)$  коэффициенты ее разложения в ряд Фурье (17.18) удовлетворяют соотношению  $f_{-n} = f_n^*$ . В этом случае ряд Фурье (17.18) иногда записывают через тригонометрические функции

$$f(x) = f_0 + 2 \sum_1^{+\infty} [\operatorname{Re} f_n \cos(2\pi n x/L) - \operatorname{Im} f_n \sin(2\pi n x/L)]. \quad (17.20)$$

Для функций, которые меняются на масштабах, гораздо меньших  $L$ , в ряде Фурье (17.18) существенны большие  $n$ . Тогда этот ряд может быть приблизительно заменен на интеграл Фурье, который идет по волновым векторам  $q = 2\pi n/L$ . Отсюда следует правило подстановки

$$\sum_n \rightarrow L \int \frac{dq}{2\pi},$$

которое позволяет преобразовывать сумму в интеграл. Таким образом, ряд Фурье переходит в интеграл Фурье с множителем  $L$  – периодом или длиной интервала.

В дальнейшем мы полагаем  $L = 2\pi$ , чего всегда можно добиться соответствующим выбором единиц измерения  $x$ . Тогда соотношения (17.18, 17.19) приобретают следующий вид

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} f_n \exp(inx), \quad (17.21)$$

$$f_n = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} \exp(-inx) f(x). \quad (17.22)$$

Обратим внимание на то, что интегрирование в (17.22) можно вести по произвольному интервалу длиной  $2\pi$ . Эта свобода позволяет из соображений удобства выбирать интервал, на котором задана функция  $f(x)$ . Например, часто выбирают интервал  $-\pi < x < \pi$ .

Если периодическое продолжение функции, заданной на конечном интервале, содержит разрывы, то это приводит к медленному убыванию коэффициентов ряда Фурье при росте  $n$ . Чтобы найти закон этого убывания, рассмотрим разложение в ряд Фурье  $\delta$ -функции. Точнее говоря, речь идет о бесконечной сумме  $\delta$ -функций, которая является периодической функцией  $x$ . Используя соотношение (17.22), находим

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - 2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp(inx). \quad (17.23)$$

В этом случае коэффициенты разложения  $f_n$  вообще не зависят от  $n$ . Для разрывной функции  $\delta$ -функции возникают в ее производной по  $x$ , то есть коэффициенты разложения этой производной не зависят от  $n$  при больших  $n$ . Для самой разрывной функции  $f$

это означает, что ее коэффициенты разложения в ряд Фурье ведут себя пропорционально  $1/n$  при больших  $n$ .

**Задача 17.6.** Найдите Фурье-преобразование следующих функций:  $f(x) = \exp(-x^2)$  в  $d$ -мерном пространстве;  $\exp(-|x|)$  в трехмерном пространстве;  $(x^2 + a^2)^{-1}$ , где  $a$  – константа, в одномерном пространстве.

**Задача 17.7.** Найдите модификацию соотношений (17.16, 17.17), которая получается при подстановке в преобразование Фурье функции  $f = g(r) \cos \varphi$ .

**Задача 17.8.** Разложить в ряд Фурье функции  $f = \exp(ax)$ , задана на интервале  $0 < x < 2\pi$ ;  $f = x$ , задана на интервале  $-\pi < x < \pi$ .

### С. Преобразование Лапласа

В задачах, в которых исследуется решение линейных дифференциальных уравнений с начальными условиями, обычно бывает полезным преобразование Лапласа, которое определяется для функций, заданных на положительных временах  $t$ . Преобразование Лапласа функции  $\Phi(t)$  определяется, как

$$\tilde{\Phi}(p) = \int_0^{\infty} dt \exp(-pt) \Phi(t). \quad (17.24)$$

Мы предполагаем, что функция  $\Phi(t)$  растет со временем  $t$  не быстрее, чем некоторая экспонента от  $t$ . Тогда интеграл (17.24) сходится при достаточно больших  $p$ . Более того, в этом случае  $\tilde{\Phi}(p)$  стремится к нулю при  $p \rightarrow \infty$ . Если же выйти в комплексную плоскость по  $p$ , то можно утверждать, что интеграл сходится при достаточно больших значениях  $\operatorname{Re} p$ . Другими словами, функция  $\tilde{\Phi}(p)$  заведомо является аналитической в области  $\operatorname{Re} p > C$ , где  $C$  – некоторая константа.

Преобразование, обратное к преобразованию Лапласа, имеет следующий вид

$$\Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \tilde{\Phi}(p), \quad (17.25)$$

где интегрирование идет вдоль прямой, параллельной мнимой оси, в области аналитичности функции  $\tilde{\Phi}(p)$ , смотри рисунок 12. На этом рисунке контур интегрирования обозначен синим цветом, а положения возможных особенностей функции  $\tilde{\Phi}(p)$  (полюсы, точки ветвления) обозначены жирными точками (из расположение условно).

Соотношение (17.25) можно рассматривать, как модификацию преобразования Фурье. Возможны деформации контура интегрирования в области аналитичности. Обратим внимание на то, что при отрицательных  $t$  интеграл (17.25) равен нулю, так как в этом

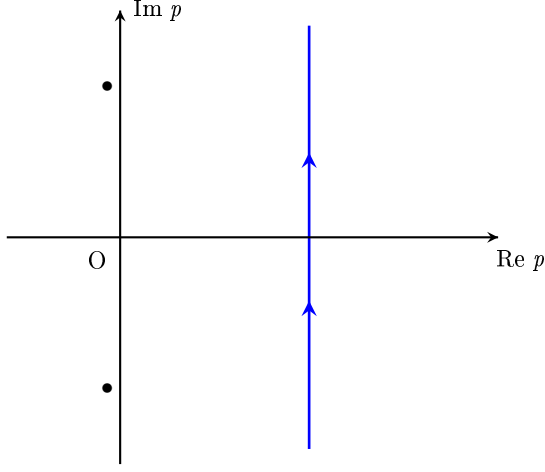


Рис. 12. Контур, по которому идет интегрирование в обратном преобразовании Лапласа.

случае оба сомножителя,  $\exp(pt)$  и  $\tilde{\Phi}(p)$ , стремятся к нулю при увеличении  $\text{Re } p$ . Поэтому, сдвигая контур интегрирования в большие  $\text{Re } p$  (и оставаясь при этом в области аналитичности), мы получим ноль. Это соответствует физическому смыслу рассматриваемой задачи, когда мы исследуем функцию, определенную только при положительных  $t$ . При положительных  $t$  контур интегрирования можно сдвигать только влево до тех пор, пока он не “наткнется” на особенность.

Рассмотрим определенное на положительных  $t$  уравнение

$$L(d/dt)\Phi(t) = f(t), \quad (17.26)$$

где  $L(x)$  – некоторый полином (порядок которого мы будем обозначать  $n$ ). Произведя преобразование Лапласа уравнения (17.26), находим  $L(p)\tilde{\Phi}(p) = \tilde{f}(p)$ . Таким образом, решение уравнения (17.26) записывается в следующем виде

$$\Phi(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} \exp(pt) \frac{\tilde{f}(p)}{L(p)}. \quad (17.27)$$

Если  $\tilde{f}(p)$  при больших положительных  $\text{Re } p$  стремится к нулю, то выражение (17.27) дает решение уравнения с нулевыми начальными условиями. Действительно, в этом случае для  $m = 0, \dots, n-1$

$$\frac{d^m}{dt^m} \Phi(+0) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{dp}{2\pi i} p^m \frac{\tilde{f}(p)}{L(p)} = 0,$$

что доказывается сдвигом контура интегрирования в большие  $\text{Re } p$ .

В таком же виде (17.27) можно записать и решение задачи Коши однородного уравнения (17.26) (с нулевой правой частью). Для этого надо использовать в качестве функции  $f(t)$  линейную комбинацию  $\delta(t)$  и ее производных, которая обеспечивает генерацию

начальных условий из нулевой при отрицательных  $t$  функции  $\Phi(t)$ . Количество производных от  $\delta$ -функции зависит от порядка полинома  $L$ : если этот порядок равен  $n$ , то надо брать производные до  $n-1$  порядка включительно. В представлении Лапласа такая функция  $\tilde{f}(p)$  представляет собой полином порядка  $n-1$  по  $p$ . Отсюда следует, например, что при больших  $t$  поведение однородного решения уравнения (17.26) будет экспоненциальным, причем ведущая экспонента определяется корнем уравнения  $L(p) = 0$  с наибольшей действительной частью. При решении смешанной задачи (17.26), когда помимо правой части задано начальное условие, надо брать линейную комбинацию вынужденного решения (17.27) и решения задачи Коши однородного уравнения.

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра́ первого рода с однородным ядром  $K$ :

$$\int_0^t ds K(t-s)\Phi(s) = f(t), \quad (17.28)$$

где функция  $f(t)$  задана, а найти надо  $\Phi(t)$ . Произведя преобразование Лапласа обеих частей уравнения (17.28), находим  $\tilde{K}(p)\tilde{\Phi}(p) = \tilde{f}(p)$ . Подстановка решения этого алгебраического уравнения в (17.26) дает решение уравнения (17.28) в виде интеграла по  $p$ . Аналогичным образом решается интегральное уравнение Вольтерра́ второго рода с однородным ядром:

$$\Phi(t) + \int_0^t ds K(t-s)\Phi(s) = f(t). \quad (17.29)$$

После перехода к представлению Лапласа мы находим алгебраическое уравнение  $[1 + \tilde{K}(p)]\tilde{\Phi}(p) = \tilde{f}(p)$ .

Изучим движение квантовой частицы в притягивающем Кулоновском потенциале (атом водорода). Для сферически симметричного состояния в случае притяжения уравнение Шрёдингера в безразмерных переменных сводится к

$$\left( \frac{1}{2} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} + E \right) \Phi = 0, \quad (17.30)$$

где  $E$  – энергия,  $r$  – радиус-вектор и волновая функция  $\Psi$  связана с величиной  $\Phi$  соотношением  $\Psi = \Phi/r$ . Умножим уравнение (17.30) на  $r$  и сделаем преобразование Лапласа по этой переменной. В результате получим уравнение

$$\frac{d}{dp} \left[ (p^2/2 + E)\tilde{\Phi} \right] = \tilde{\Phi}.$$

Нас будут интересовать связанные состояния, соответствующие отрицательной энергии. Подставляя  $E = -\alpha^2/2$ ,  $\alpha > 0$ , и решая полученное уравнение для  $\tilde{\Phi}$ , находим

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{1}{p^2 - \alpha^2} \left( \frac{p - \alpha}{p + \alpha} \right)^{1/\alpha}. \quad (17.31)$$

Выражение (17.31) имеет сингулярность при  $p = \alpha$ , то есть контур интегрирования в обратном преобразовании Лапласа (17.25) должен идти справа от этой точки. Это означает, что при больших  $r$  функция  $\Phi(r)$  ведет себя пропорционально  $\exp(\alpha r)$ . Это поведение не соответствует связанным состояниям. Исключением является случай  $\alpha = 1/n$  ( $n$  – целое число), тогда особенность при  $p = \alpha$  исчезает. Именно эти значения соответствуют связанным состояниям частицы с энергией  $E = -1/(2n^2)$ :

$$\tilde{\Phi} \propto \frac{(p - 1/n)^{n-1}}{(p + 1/n)^{n+1}}, \quad (17.32)$$

Для основного состояния, то есть при  $n = 1$ , мы находим  $\tilde{\Phi} \propto (p + 1)^{-2}$ . Таким образом интегрирование в обратном преобразовании Лапласа сводится к взятию вычета в точке  $p = -1$ . Вычисляя этот вычет, находим  $\Phi(r) \propto r \exp(-r)$ , то есть  $\Psi \propto \exp(-r)$ .

**Задача 17.9.** Найти преобразования Лапласа следующих функций:  $\Phi = \exp(-\lambda t)$ ,  $\Phi = t^n$ ,  $\Phi = \cos(\nu t)$ ,  $\Phi = \cosh(\lambda t)$ ,  $\Phi = t^{-1/2}$ .

**Задача 17.10.** Найти решение уравнения  $\ddot{\Phi} + \Phi = \exp(-\lambda t)$  с начальными условиями  $\Phi(0) = 1$ ,  $\dot{\Phi}(0) = 0$ .

**Задача 17.11.** Найти решение уравнения (17.28) для  $K(t) = \exp(-\lambda t)$ ,  $f(t) = t^n$ .

**Задача 17.12.** Найти решение уравнения (17.28) для  $K(t) = t^n$ ,  $f(t) = \cos(\nu t)$ .

**Задача 17.13.** Найти волновую функцию связанного состояния атома водорода, соответствующего  $n = 2$ ,  $l = 0$ . Указание: использовать преобразование Лапласа.

**Задача 17.14.** Найти преобразование Лапласа волновых функций связанных состояний атома водорода, соответствующих ненулевому угловому числу  $l$ .

## D. Собственные функции оператора

Рассмотрим функции одной переменной, заданные на конечном интервале  $a < x < b$ . Будем называть дифференциальный оператор  $\hat{L}$  самосопряженным, если для любых двух функций,  $f(x)$  и  $g(x)$ , из интересующего нас класса выполняется соотношение

$$\int_a^b dx f \hat{L}g = \int_a^b dx g \hat{L}f. \quad (17.33)$$

Выполнение условия (17.33) может быть связано как со свойствами класса рассматриваемых функций, так и со свойствами оператора  $\hat{L}$ . Например, нулевые граничные условия или периодические граничные условия (когда на концах интервала одинаковы значения

самой функции и одинаковы значения ее производной), наложенные на функции  $f$  и  $g$ , приводят к самосопряженности оператора  $\hat{L} = d^2/dx^2 + U(x)$ .

В дальнейшем нас будет интересовать обобщение соотношения (17.33)

$$\int_a^b dx \rho f \hat{L}g = \int_a^b dx \rho g \hat{L}f, \quad (17.34)$$

где  $\rho(x)$  – положительная функция, которую обычно называют весовой функцией или мерой интегрирования. Удовлетворяющий условию (17.34) оператор  $\hat{L}$  уже не является самосопряженным. В частности, им может быть оператор Штурма-Лиувилля

$$\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} + Q \frac{d}{dx} + U, \quad (17.35)$$

где  $Q$  и  $U$  – функции от  $x$ . Легко проверить, что при нулевых или периодических граничных условиях на функции  $f, g$  оператор (17.35) удовлетворяет условию (17.34), если

$$\frac{d}{dx} \rho = Q \rho \rightarrow \rho = \exp\left(\int dx Q\right). \quad (17.36)$$

Рассмотрим теперь собственные функции  $f_n$  оператора  $\hat{L}$ , которые удовлетворяют уравнению  $\hat{L}f_n = \lambda_n f_n$ , где  $\lambda_n$  – собственное значение оператора  $\hat{L}$ . Условие (17.34) приводит к соотношению

$$\int dx \rho f_n \hat{L}f_m = \lambda_m \int dx \rho f_n f_m = \lambda_n \int dx \rho f_n f_m.$$

Таким образом, при  $\lambda_n \neq \lambda_m$  выполняется условие ортогональности

$$\int_a^b dx \rho f_n f_m = 0. \quad (17.37)$$

Как следует из соотношения (17.33), собственные функции самосопряженных операторов также ортогональны, причем с весом  $\rho = 1$ . В качестве примера приведем  $\cos(nx), \sin(nx)$ , которые являются собственными функциями оператора  $d^2/dx^2$  на интервале  $(0, 2\pi)$  в классе периодических функций. Поскольку для этого оператора Штурма-Лиувилля (17.35)  $Q = 0$ , то в силу (17.36)  $\rho = 1$ , и соотношения (17.37) легко проверяются непосредственно.

Дополнительного комментария требует наличие вырождения (то есть собственных функций с совпадающими собственными значениями оператора  $\hat{L}$ ). Мы будем считать, что набор собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению оператора  $\hat{L}$ , за счет линейного преобразования выбран таким образом, чтобы внутри этого набора также выполнялось условие ортогональности (17.37). Отметим, что для рассмотренного нами примера оператора  $d^2/dx^2$ , собственные функции которого дважды вырождены (собственному значению  $\lambda_n =$

$-n^2$  соответствуют две собственные функции), условие взаимной ортогональности удовлетворяют как раз  $\cos(nx), \sin(nx)$ .

Если  $f_n$  является полным набором собственных функций оператора  $\hat{L}$  из интересующего нас класса, то любую функцию  $f$  того же класса можно разложить в ряд по этим собственным функциям:

$$f = \sum_n c_n f_n. \quad (17.38)$$

Коэффициенты этого разложения в силу условий ортогональности (17.37) равны

$$c_n = A_n^{-1} \int dx \rho f_n f, \quad A_n = \int dx \rho f_n^2. \quad (17.39)$$

Примером разложения (17.38) является разложение по уже упомянутым нами функциям  $\cos(nx), \sin(nx)$ , которое является не чем иным, как разложением в ряд Фурье. Подставляя выражение (17.39) для коэффициентов  $c_n$  в разложение (17.38), мы находим соотношение

$$f(x) = \int dy \rho \sum_n \frac{f_n(x) f_n(y)}{A_n} f(y),$$

которое должно выполняться для любой функции  $f$  из выбранного нами класса. Поэтому справедливо соотношение

$$\sum_n A_n^{-1} f_n(x) f_n(y) = \frac{1}{\rho(y)} \delta(x - y), \quad (17.40)$$

которое является выражением полноты системы функций  $f_n$ .

Рассмотрим теперь неоднородную задачу  $\hat{L}f = \phi$ . Представляя обе функции,  $f$  и  $\phi$ , в виде ряда по собственным функциям оператора  $\hat{L}$ :  $f = \sum_n c_n f_n$  и  $\phi = \sum_n a_n f_n$ , мы находим  $c_n = a_n / \lambda_n$ . Таким образом, мы сталкиваемся с проблемой, если у оператора  $\hat{L}$  имеется нулевое собственное значение. (В этом случае часто говорят, что у оператора  $\hat{L}$  есть нулевые моды.) Эта проблема является неустранимой в том смысле, что если в разложении “силы”  $\phi$  имеется ненулевой вклад с собственной функцией, соответствующей нулевому собственному числу, то неоднородная задача  $\hat{L}f = \phi$  не может быть решена в базисе функций  $f_n$ . Поясним это утверждение на примере оператора  $\hat{L} = d^2/dx^2$ , который имеет собственную функцию, соответствующую нулевому собственному значению (нулевую моду), которая есть просто константа. Будем рассматривать задачу с периодическими граничными условиями. Наличие константы в разложении  $\phi$  означает, что интеграл от  $\phi$  по периоду не равен нулю. В то же время для периодической функции  $f$  интеграл по периоду от  $d^2 f/dx^2$  равен нулю. Поэтому уравнение  $d^2 f/dx^2 = \phi$  не имеет решения на классе периодических функций.

Отметим, что к изучаемому нами типу функций принадлежат полиномы Лежандра и Эрмита. Как

следует из уравнения (??) для полиномов Эрмита, они являются собственными функциями оператора Штурма-Лиувилля (17.35) с  $Q = -2x, U = 0$ . В этом случае в соответствии с (17.36)  $\rho = \exp(-x^2)$ , а интервал интегрирования по  $x$  простирается от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Поскольку  $\rho(x)$  быстро стремится к нулю при  $x \rightarrow \pm\infty$ , от функций  $f$  следует требовать не слишком быстрого роста на бесконечности. Поэтому мы приходим к условиям ортогональности (17.37) для полиномов Эрмита, которые и зафиксированы соотношением (11.12).

Как следует из уравнения (??), которому подчиняются полиномы Лежандра, они являются собственными функциями оператора Штурма-Лиувилля (17.35) с  $Q = \cot \theta$  и  $U = 0$ . В этом случае в соответствии с (17.36)  $\rho = \sin \theta$ . Интервал же интегрирования по углу  $\theta$  распространяется от 0 до  $\pi$ . Поскольку  $\rho$  обращается в ноль на концах интервала, достаточно потребовать конечности функций  $f$  на этом интервале, что определяет рассматриваемый класс функций. Условие (17.37) переписывается в виде  $\int d\mu f_n f_m = 0$ , где  $\mu = \cos \theta$ . Таким образом, в терминах переменной  $\mu$  полиномы Лежандра ортогональны с весом единица на интервале  $-1 < \mu < 1$ , что и зафиксировано соотношением (10.19). Отметим, что соотношение ортогональности (17.37) не предполагает, что оператор  $\hat{L}$  является оператором Штурма-Лиувилля (17.35). Поэтому при доказательстве соотношений (10.19) можно исходить и непосредственно из уравнения (10.5), которое показывает, что полиномы Лежандра являются собственными функциями самосопряженного оператора, что и приводит прямо к (10.19).

## 18. ОТДЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ

В настоящем разделе мы кратко представляем некоторые методы, часто использующиеся при анализе задач математической физики.

### А. Метод характеристик

Метод характеристик позволяет свести решение определенного класса уравнений в частных производных к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. А именно, он применим к уравнениям, которые содержат только первые производные и линейным по этим производным. Такое уравнение можно записать в виде

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla g = f, \quad (18.1)$$

где  $g$  – искомая функция, зависящая от времени  $t$  и координат  $\mathbf{x}$  пространства произвольной размерности. “Скорость”  $\mathbf{V}$  и “накачка”  $f$  являются некоторыми функциями времени и координат,  $t, \mathbf{x}$ , а также самой искомой функции  $g$ . Тогда решение уравнения (18.1)



может быть построено следующим образом. Надо найти решения уравнений

$$\frac{dg}{dt} = f, \quad (18.2)$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V}. \quad (18.3)$$

Траектории, описываемые уравнением (18.3), называются характеристиками системы. Чтобы найти значение функции  $g$  в момент времени  $t$  и в точке  $\mathbf{x}$ , необходимо взять характеристику, которая заканчивается в момент времени  $t$  в точке  $\mathbf{x}$ . После этого надо решить уравнение (18.2) вдоль этой характеристики, используя в качестве начального условия  $g(t_0, \mathbf{x}_0)$ , где  $t_0$  – начальное время, при котором задается начальное условие на функцию  $g$ , а  $\mathbf{x}_0$  – точка, в которой находится решение уравнения (18.3) в начальный момент времени  $t_0$ .

**Задача 18.1.** Найти решение уравнения (18.1) для сдвигового поля  $V_x = sy$ ,  $V_y = 0$  с нулевыми начальными условиями и статического поля  $f(x, y) = \partial_x F(x, y)$ .

### В. Метод перевала и стационарной фазы

Метод перевала применим к интегралам вида

$$g(\nu) = \int_a^b dx \exp[f(x)], \quad (18.4)$$

где (действительная) функция  $f(x)$  достигает на интервале  $(a, b)$  абсолютного максимума в некоторой промежуточной точке  $c$ . Тогда при больших значениях функции  $f$  основной вклад в интеграл (18.4) определяется узкой окрестностью этого максимума. Раскладывая функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора вблизи точки  $x = c$ , мы находим  $f \approx f(c) + (1/2)f''(c)(x - c)^2$ . Так как точка  $x = c$  соответствует максимуму функции  $f$ , то  $f''(c) < 0$ . Подставляя это разложение в (18.4), мы приходим к Гауссовому интегралу. При больших значениях  $f''$  интегрирование по  $x$  в этом интеграле можно распространить от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Вычисляя полученный Гауссов интеграл, находим асимптотическое выражение

$$g(\nu) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(c)}} \exp[f(c)], \quad (18.5)$$

которое справедливо при  $|f''(c)| \gg 1$ .

Отметим, что если функция  $f(x)$  достигает абсолютного максимума на одном из краев интервала ( $a$  или  $b$ ), то именно окрестность этой точки определяет основной вклад в интеграл (18.4) при больших положительных  $f$ . Этот случай может быть исследован

аналогично, в рамках разложения функции  $f(x)$  вблизи  $a$  или  $b$ . Тогда можно ограничиться линейным членом разложения функции  $f(x)$  по  $x - a$  или  $x - b$  (если только этот член разложения не равен нулю), что упрощает анализ.

Метод стационарной фазы работает для интегралов вида  $\int dx \exp[ih(x)]$ , где  $h(x)$  – действительная функция, имеющая в области интегрирования стационарную точку  $x_0$ , то есть  $dh/dx(x_0) = 0$ , причем  $|d^2h/dx^2(x_0)| \gg 1$ . В этом случае основной вклад в интеграл определяется окрестностью стационарной точки, так как именно в этой окрестности функция  $\exp[ih(x)]$  осциллирует медленнее всего. В окрестности стационарной точки функцию  $h$  можно разложить в ряд по  $x - x_0$ . Удерживая члены до второго порядка, можно написать

$$h \approx \Theta \pm \frac{A}{2}(x - x_0)^2, \quad (18.6)$$

где линейный член отсутствует в силу стационарности фазы в точке  $x_0$ , и  $\pm A = d^2h/dx^2(x_0)$ . Знак  $\pm$  перед  $A$  связан с тем, что мы полагаем  $A > 0$ . Далее

$$\begin{aligned} \int dx \exp[ih(x)] &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp[i\Theta \pm iA(x - x_0)^2/2] \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \exp(i\Theta \pm i\pi/4). \end{aligned} \quad (18.7)$$

Беря действительную и мнимую части соотношения (18.7), мы находим

$$\int dx \cos h \approx \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \cos(\Theta \pm \pi/4), \quad (18.8)$$

$$\int dx \sin h \approx \sqrt{\frac{2\pi}{A}} \sin(\Theta \pm \pi/4). \quad (18.9)$$

Методы перевала и стационарной фазы можно обобщить на случай контурных интегралов в комплексной плоскости. При этом перевальная точка (точка стационарной фазы) не обязана лежать на этом контуре.

Обобщенный метод перевала применим к контурным интегралам типа

$$\int_a^b dz \exp[S(z)] \quad (18.10)$$

при выполнении определенных условий на функцию  $S(z)$ . Прежде всего мы будем предполагать, что функция  $S(z)$  аналитична вблизи пути интегрирования от  $a$  к  $b$  и, следовательно, контур интегрирования можно деформировать в области аналитичности  $S(z)$ . Далее, мы будем предполагать, что в области аналитичности имеется по крайней мере одна точка с нулевой производной  $S'(z_0) = 0$  и что контур интегрирования можно деформировать таким образом, чтобы он проходил через  $z_0$ , причем действительная часть  $S(z)$  должна достигать в точке  $z_0$  максимума при движении вдоль

деформированного контура. Тогда точка  $z_0$  называется седловой, поскольку для направления, перпендикулярного контуру, действительная часть  $S(z)$  достигает в точке  $z_0$  минимума.

Если в седловой точке действительная часть  $S(z)$  достигает абсолютного максимума вдоль контура интегрирования, то можно надеяться, что именно окрестность седловой точки даст главный вклад в интеграл (18.10). Разложим  $S$  в ряд Тейлора вблизи седловой точки:  $S \approx S_0 + S_0''(z - z_0)^2/2$ , где  $S_0$  и  $S_0''$  – значения функции  $S$  и ее второй производной в точке  $z = z_0$ . Если  $S$  достаточно быстро меняется вблизи седловой точки, то главный вклад в интеграл дает узкая окрестность седловой точки  $z = z_0$ , и мы можем ограничиться в интеграле (18.10) этим разложением, распространив интегрирование до бесконечности в обе стороны. Тогда мы приходим к Гауссовому интегралу, который дает

$$\int_a^b dz \exp[S(z)] \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-S_0''}} \exp(S_0). \quad (18.11)$$

Подчеркнем, что обе величины,  $S_0$  и  $S_0''$ , могут быть комплексными. Знак перед квадратным корнем в (18.11) определяется направлением, в котором контур интегрирования проходит через седловую точку. Условием применимости приближения (18.11) является значительное изменение функции  $S(z)$  в области применимости приведенного разложения, то есть  $|S_0''|R^2 \gg 1$ , где  $R$  – радиус сходимости разложения функции  $S(z)$  в ряд Тейлора около точки  $z = z_0$ .

В области аналитичности функции  $S(z)$  может оказаться несколько седловых точек. В этом случае надо выбрать ту из них, в которой  $\text{Re}S_0$  максимальна, поскольку именно окрестность этой точки дает главный вклад в интеграл (18.10). Возможно также вырождение, когда действительные части  $S$  в нескольких седловых точках одинаковы (или мало отличаются). Тогда для оценки интеграла (18.10) надо брать сумму выражений (18.11) для этих седловых точек.

Рассмотренные выше метод стационарной фазы и метод перевала могут рассматриваться, как частные случаи обобщенного метода перевала.

**Задача 18.2.** Найти значение интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(\alpha x^2 - x^4/2)$  при больших положительных  $\alpha$ .

**Задача 18.3.** Найти значение интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos(\alpha x^2/2 - x^3/3)$  при больших положительных  $\alpha$ .

**Задача 18.4.** Найти значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-x^4/4) \cos(\alpha x)$$

при больших положительных  $\alpha$ .

## С. Метод Лапласа

Метод Лапласа позволяет получать интегральные представления решений обыкновенных дифференциальных уравнений для функции  $Y(x)$ , линейных по переменной  $x$ :

$$\sum_{m=0}^N (a_m + b_m x) \frac{d^m Y}{dx^m} = 0. \quad (18.12)$$

Это интегральное представление имеет вид

$$Y(x) = \int_C dt Z(t) \exp(xt), \quad (18.13)$$

где  $C$  – некоторый контур в комплексной плоскости  $t$ . Подставляя уравнение (18.12) в представление (18.13), используя соотношение  $x \exp(xt) = d \exp(xt)/dt$  и предполагая, что в интеграле (18.13) можно произвести интегрирование по частям по  $t$  без граничных членов, мы находим уравнение

$$\frac{d}{dt}(QZ) = PZ, \quad (18.14)$$

$$P(t) = \sum_{m=0}^N a_m t^m, \quad Q(t) = \sum_{m=0}^N b_m t^m. \quad (18.15)$$

Решением уравнения (18.14) является

$$Z = \frac{1}{Q} \exp\left(\int dt P/Q\right), \quad (18.16)$$

где в показателе экспоненты стоит первообразная от  $P/Q$  (определенная с точностью до константы). Поскольку  $P$  и  $Q$  являются полиномами по  $t$ , эту первообразную можно выразить через элементарные функции.

Выясним теперь условия, при которых возможно упомянутое выше интегрирование по частям. Для этого произведение  $ZQ \exp(xt)$  должно иметь одно и то же значение на концах контура  $C$  (который может быть как замкнутым, так и незамкнутым). Наиболее естественным выбором контура  $C$  является контур, который идет вдоль одного из направлений из бесконечности, вдоль которого произведение  $ZQ \exp(xt)$  стремится к нулю, и возвращается в бесконечность вдоль другого направления так, чтобы вдоль этого направления произведение  $ZQ \exp(xt)$  также стремилось к нулю. Число таких направлений растет с увеличением порядка уравнения  $N$ , что и обеспечивает необходимое число независимых решений уравнения (18.12), которые получаются из выражения (18.16) при различных выборах контура интегрирования  $C$ .

Продemonстрируем работу метода Лапласа на примере уравнения Эйри

$$d^2 Y/dx^2 - xY = 0, \quad (18.17)$$

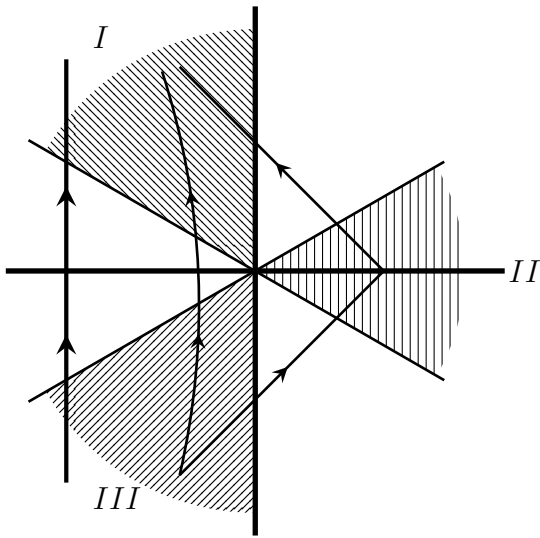


Рис. 13. Возможные контуры, по которым идет интегрирование в интегральном представлении функции Эйри.

которое относится к классу уравнений (18.12). Составляем функции (18.15)

$$P(t) = t^2, \quad Q(t) = -1.$$

После этого находим из (18.16)  $Z = -\exp(-t^3/3)$ . Подставляя это выражение в (18.13), находим общее решение

$$Y(x) \propto \int_C dt \exp(xt - t^3/3). \quad (18.18)$$

Контур  $C$  в представлении (18.18) должен начинаться и оканчиваться в областях, где подынтегральное выражение в (18.18) стремится к нулю. Очевидно, что для этого контур  $C$  должен приходить из бесконечности и уходить в бесконечность. Поскольку поведение  $\exp(xt - t^3/3)$  в бесконечности определяется фактором  $-t^3$ , имеется три сектора, в которых подынтегральное выражение в (18.18) стремится к нулю:  $-\pi/6 < \text{Arg } t < \pi/6$ ,  $\pi/2 < \text{Arg } t < 5\pi/6$ ,  $7\pi/6 < \text{Arg } t < 3\pi/2$ , смотри рисунок 13, секторы I, II, III. Контур  $C$  должен начинаться в одном из этих секторов и заканчиваться в другом. Имеется три варианта. Однако получающиеся интегралы линейно связаны между собой, поскольку сумма интегралов по контурам, идущих из сектора I в сектор II, из сектора II в сектор III, и из сектора III в сектор I, равна, очевидно, нулю. Таким образом, имеется две независимые возможности, что соответствует второму порядку уравнения Эйри, которое должно иметь два независимых решения.

Решению, которое остается конечным при  $x \rightarrow \pm\infty$  соответствует контур, идущий из сектора III в сектор

I. Можно выбирать различную форму такого контура (смотри рисунок 13), единственное требование к форме контура заключается в том, чтобы  $\exp(xt - t^3/3)$  стремилось к нулю на концах этого контура. Это связано с возможностью деформации контура в области аналитичности подынтегрального выражения, которой в данном случае является вся комплексная плоскость. В частности, можно выбрать контур, идущий вдоль мнимой оси. Введя обозначение  $t = iu$ , мы сводим этот интеграл к виду

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \cos(xu + u^3/3), \quad (18.19)$$

где множитель выбран традиционным образом. Введенная (18.19) функция называется функцией Эйри (Airy).

Установим асимптотическое поведение функции Эйри при больших значениях  $|x|$ . При больших отрицательных  $x$  в интеграле (18.19) имеется точка стационарной фазы  $u = \sqrt{|x|}$ , окрестность которой дает основной вклад в интеграл при больших  $|x|$ . Применяя метод стационарной фазы (смотри раздел 18B), находим, используя (18.8)

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right). \quad (18.20)$$

При больших положительных  $x$  стационарная точка в интеграле (18.19) отсутствует. Чтобы найти соответствующую асимптотику, мы должны вернуться на шаг назад:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} dt \exp(tx - t^3/3).$$

Теперь мы должны применить обобщенный метод перевала, смотри раздел 18B. Контур интегрирования должен быть деформирован так, чтобы он проходил через перевальную точку  $t = -x^{1/2}$  (смотри вертикальную прямую на рисунке 13). Вычисляя интеграл в соответствии с (18.11), находим

$$\text{Ai}(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right). \quad (18.21)$$

График зависимости функции Эйри от  $x$  приведен на рисунке 14. На этом же графике красным цветом приведены асимптотики (18.20, 18.21).

В качестве второго решения уравнения Эйри (18.17) выбирают обычно функцию

$$\text{Bi}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty du [\exp(xu - u^3/3) + \sin(xu + u^3/3)], \quad (18.22)$$

которая называется функцией Эйри второго рода (а функцию Ai называют функцией Эйри первого рода). Выражение для Bi получается, если взять сумму контурных интегралов для контуров, идущих из сектора

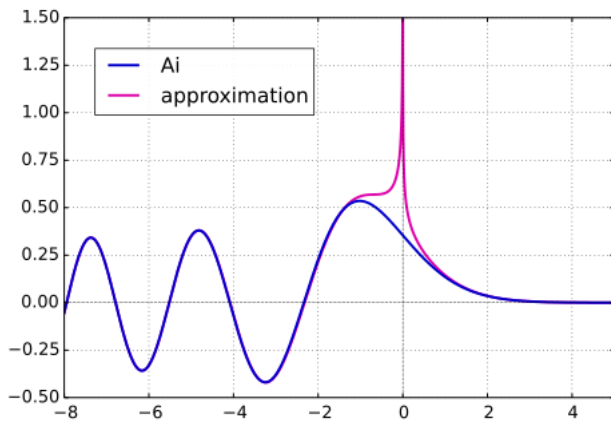


Рис. 14. Функция Эйри с асимптотиками.

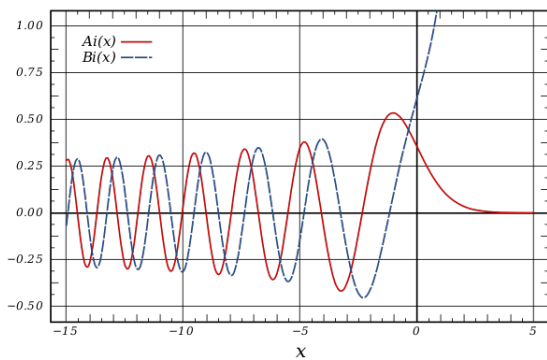


Рис. 15. Функции Эйри первого и второго рода.

I в сектор II и из сектора III в сектор II. Выбирая эти интегралы, как идущие сначала вдоль мнимой оси, а затем вдоль действительной оси, мы и приходим к выражению (18.22). Коэффициент в (18.22) традиционен. Сравнение функций Эйри  $Ai$  и  $Bi$  проведено на рисунке 15.

**Задача 18.5.** Найти значения  $Ai(0)$ ,  $Ai'(0)$ ,  $Bi(0)$ ,  $Bi'(0)$ .

**Задача 18.6.** Найти асимптотическое поведение функции  $Bi(x)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

#### Д. Метод WKB

Рассмотрим уравнение (3.5), где в операторе Штурма-Лиувилля (3.6) мы положим  $Q = 0$ :

$$\frac{d^2}{dx^2}f + Uf = 0. \quad (18.23)$$

Предположим, что величина  $p = \sqrt{-U}$  меняется достаточно медленно на масштабе  $p^{-1}$ , что означает выполнение неравенства  $dp/dx \ll p^2$ . Тогда для функции

$f$  можно построить следующее приближенное решение

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{p}} \exp(S) + \frac{C_2}{\sqrt{p}} \exp(-S), \quad (18.24)$$

$$S(x) = \int^x dy p(y), \quad (18.25)$$

где  $C_1, C_2$  – некоторые константы. Выражение (18.24) было получено Вентцелем (Wentzel), Крамерсом (Kramers) и Бриллюэном (Brillouin) и носит название приближения WKB, что является аббревиатурой имен этих авторов.

Подставляя выражение (18.24) в уравнение (18.23), можно убедиться, что оно является решением, если пренебречь в нем членами с  $(dp/dx)^2$  и  $d^2p/dx^2$ . Первое пренебрежение возможно в силу предполагаемого неравенства  $dp/dx \ll p^2$ , а второе в силу неравенства  $d^2p/dx^2 \ll p dp/dx$ , которое получается из предыдущего дифференцированием по  $x$ .

Фактор  $U$  в уравнении (18.23) может быть как отрицательным, так и положительным, к обоим этим случаям одинаково применим метод WKB. В первом случае величина  $p$  является действительной, и два слагаемых в выражении (18.24) являются растущей и убывающей по  $x$  экспонентами. Во втором случае величина  $p$  является чисто мнимой, и мы имеем дело с экспонентами от мнимых величин  $S$ . Другими словами, мы имеем дело с осциллирующими функциями, если речь идет о действительных решениях. Тогда мы можем записать

$$f = \frac{C}{|p|^{1/2}} \cos(A + \varphi), \quad (18.26)$$

где  $S = iA$ ,  $C$  – действительная константа и  $\varphi$  – некоторая фаза.

Приведенная схема легко обобщается на случай произвольного оператора Штурма-Лиувилля (3.6)

$$\frac{d^2}{dx^2}f + Q \frac{df}{dx} + Uf = 0.$$

В этом случае вместо (18.24,18.25) находим

$$f = \frac{C_1}{\sqrt{p_1}} \exp(S_1) + \frac{C_2}{\sqrt{p_2}} \exp(S_2), \quad (18.27)$$

$$S_{1,2}(x) = \int^x dy p_{1,2}(y), \quad (18.28)$$

где  $p_{1,2}$  являются корнями квадратного уравнения

$$p^2 + Qp + U = 0.$$

**Задача 18.7.** Установить методом WKB асимптотическое поведение функций Эйри  $Ai(x)$  и  $Bi(x)$ .

#### Е. Нётеровские интегралы движения

Многие эволюционные дифференциальные уравнения приводят к сохранению некоторых величин, кото-

рые называют интегралами движения. Наличие интегралов движения облегчает анализ решений соответствующего уравнения, и потому их нахождение является важной задачей. Здесь мы изложим способ нахождения интегралов движения, связанных с непрерывной симметрией уравнения, который был разработан Нётер. Поэтому соответствующие интегралы движения называются Нётеровскими.

Нётеровские интегралы возникают в том случае, если исследуемое уравнение является следствием вариационного принципа. А именно, рассмотрим дифференциальное уравнение для поля  $u$ , которое получается, как экстремум функционала

$$S = \int dt dr L(u, \dot{u}, \nabla u). \quad (18.29)$$

Обычно этот функционал называют действием. Условие экстремума действия дает уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial(\dot{u})} + \nabla \frac{\partial L}{\partial(\nabla u)} = \frac{\partial L}{\partial u}, \quad (18.30)$$

которому подчиняется поле  $u$ .

Уравнение (18.30) или действие (18.29) однородны в пространстве и времени, то есть инвариантны относительно сдвига начала отсчета времени или сдвига начала координат. При инфинитезимальном сдвиге начала отсчета времени поле  $u$  изменяется, это изменение равно  $\delta u = \tau \partial_t u$ , где  $\tau$  – величина сдвига. Легко проверить непосредственно, что действие (18.29) не меняется при таком преобразовании. Предположим теперь, что  $\tau$  – некоторая функция пространства и времени. Тогда вариация действия  $S$  при преобразовании  $\delta u = \tau \partial_t u$  уже не будет равна нулю, ее можно записать в следующем виде

$$\delta S = \int dt dr \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right) \dot{\tau} + \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{u} \nabla \tau \right], \quad (18.31)$$

где мы использовали интегрирование по частям и соотношение

$$\partial_t L = \frac{\partial L}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \ddot{u} + \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{\nabla} u.$$

С другой стороны, для поля  $u$ , которое подчиняется уравнению движения (18.30), вариация действия (18.30) при любой вариации поля  $u$ , в том числе и при вариации  $\delta u = \tau \partial_t u$ , должна быть равна нулю. Другими словами, для поля  $u$ , которое подчиняется уравнению движения (18.30), равно нулю выражение (18.31). Поскольку поле  $\tau$  в выражении (18.31) является произвольной функцией времени и пространства, мы приходим к соотношению

$$\partial_t \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right) + \nabla \left( \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \dot{u} \right) = 0, \quad (18.32)$$

которое имеет вид локального закона сохранения. Обычно закон (18.32) называют законом сохранения

энергии, а сохраняющийся вследствие этого уравнения интеграл

$$E = \int dr \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \dot{u} - L \right), \quad (18.33)$$

называют энергией. Закон сохранения энергии имеет вид  $\partial_t E = 0$ .

С формальной точки зрения, закон сохранения энергии (18.32) следует из того, что в выражении (18.31) для вариации действия присутствуют только производные (по времени и пространству) от поля  $\tau$ , но не само  $\tau$ . В свою очередь, это свойство следует из инвариантности действия по отношению к сдвигу начала отсчета времени, которое соответствует  $\tau = \text{const}$ . Поэтому при не зависящем от времени и координат поле  $\tau$  вариация действия обязана обращаться в ноль, что и объясняет отсутствие членов с  $\tau$  (без производных) в вариации (18.31). Понятно, что таким же образом будут получаться законы сохранения в том случае, если действие инвариантно относительно преобразования поля  $u$ , которое характеризуется некоторым непрерывным параметром типа  $\tau$ . Поэтому иногда говорят, что Нётеровские интегралы движения являются следствием непрерывной симметрии действия. Дискретная же симметрия (типа инвариантности действия относительно изменения знака поля  $u$ ) законов сохранения не дает.

Рассмотрим закон сохранения, который получается из инвариантности действия относительно сдвига начала координат. При инфинитезимальном сдвиге начала координат поле  $u$  изменяется, это изменение равно  $\delta u = \xi \nabla u$ , где  $\xi$  – величина сдвига. Считая теперь, что  $\xi$  является произвольной функцией времени и пространства, вычисляя вариацию действия (18.29) при вариации  $\delta u = \xi \partial_x u$  и приравнявая результат к нулю (что справедливо для поля  $u$ , подчиняющемся уравнению движения), находим

$$\partial_t \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \nabla \left( \frac{\partial L}{\partial \nabla u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. \quad (18.34)$$

Аналогичные уравнения справедливы и для остальных координат. Таким образом, мы приходим к закону сохранения величины

$$\mathbf{P} = \int dr \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \nabla u, \quad (18.35)$$

которую обычно называют импульсом. Закон сохранения импульса имеет вид  $\partial_t \mathbf{P} = 0$ .

Чтобы проиллюстрировать возникновение Нётеровских интегралов движения, не связанных с однородностью в пространстве и времени, рассмотрим случай, когда интересующее нас поле является комплексным. Обозначим его  $\psi$ . В этом случае действие  $S$  можно записать в виде

$$S = \int dt dr L(\psi, \psi^*, \dot{\psi}, \dot{\psi}^*, \nabla \psi, \nabla \psi^*). \quad (18.36)$$

Мы записали зависимость  $L$  от  $\psi$  и сопряженного ему поля  $\psi^*$  отдельно, поскольку в силу того, что поле  $\psi$  имеет две компоненты (действительную и мнимую части) уравнения движения на  $\psi$  или  $\psi^*$  можно получить независимым варьированием по  $\psi$  или  $\psi^*$ .

Теперь предположим, что действие (18.36) инвариантно относительно сдвига фазы (что справедливо, например, для НУШ). Для инфинитезимального сдвига это преобразование имеет вид  $\delta\psi = i\alpha\psi$ ,  $\delta\psi^* = -i\alpha\psi^*$ . Инвариантность действия относительно этого преобразования означает, что

$$\frac{\partial L}{\partial\psi}\psi + \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\dot{\psi} + \frac{\partial L}{\partial\nabla\psi}\nabla\psi - \frac{\partial L}{\partial\psi^*}\psi^* - \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}^*}\dot{\psi}^* - \frac{\partial L}{\partial\nabla\psi^*}\nabla\psi^* = 0.$$

Считая теперь, что  $\alpha$  является произвольной функцией времени и пространства, вычисляя вариацию действия (18.36) при вариации  $\delta\psi = i\alpha\psi$ ,  $\delta\psi^* = -i\alpha\psi^*$  и приравнявая результат к нулю (с использованием приведенного выше выражения), находим закон сохранения

$$i\partial_t \left( \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\psi - \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}^*}\psi^* \right) + i\nabla \left( \frac{\partial L}{\partial\nabla\psi}\psi - \frac{\partial L}{\partial\nabla\psi^*}\psi^* \right) = 0. \quad (18.37)$$

Таким образом, мы приходим к закону сохранения величины

$$N = \int dr i \left( \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}\psi - \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}^*}\psi^* \right), \quad (18.38)$$

которую называют числом частиц или волновым действием. Закон сохранения имеет вид  $\partial_t N = 0$ .

**Задача 18.8.** Найти сохраняющиеся величины для обобщенного уравнения КдФ

$$\partial_t u + g\partial_x u + \partial_x[(\partial f/\partial u)\partial_x^2 f] = 0,$$

где  $f$ ,  $g$  – произвольные функции  $u$ . Указание: найдите действие, экстремумом которого является данное уравнение.

**Задача 18.9.** Найти сохраняющиеся величины для обобщенного уравнения синус-Гордон

$$\partial_t^2 \varphi - \partial_x^2 \varphi + f(\varphi) = 0,$$

где  $f$  – периодическая функция с периодом  $2\pi$ , удовлетворяющая условию  $\int_0^{2\pi} d\varphi f(\varphi) = 0$ . Указание: найдите действие, экстремумом которого является данное уравнение.

**Задача 18.10.** Найти момент импульса поля  $u$ , динамика которого дается действием

$$S = \int dt d^3r \left[ \frac{1}{2}(\partial_t u)^2 - \frac{1}{2}(\nabla u)^2 - F(u) \right],$$

где  $F$  – произвольная функция  $u$ . Указание: действие инвариантно относительно инфинитезимального поворота на угол  $\theta$ , при котором поле  $u$  преобразуется следующим образом  $\delta u = -\theta_i \epsilon_{ikn} r_k \partial_n u$ , где  $\epsilon_{ikn}$  – абсолютно антисимметричный тензор, а  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор.

- 
- [1] И. В. Колоколов и др., Задачи по математическим методам физики, Москва, Эдиториал УРСС, 2009.
- [2] Н. А. Кудряшов, Методы нелинейной математической физики, Долгопрудный, Интеллект, 2010.
- [3] А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров, Специальные функции математической физики, Долгопрудный, Интеллект, 2007.
- [4] Д. А. Шапиро, Конспект лекций по математическим методам физики, части 1,2, Новосибирск, НГУ, 2004.
- [5] М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Лань, СП, 2002.
- [6] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, Лань, СП, 2008.
- [7] Г. Бейтмен и А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, Лань, СП, 2001.
- [8] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, Теория солитонов, Москва, Наука, 1980.
- [9] И. С. Градштейн и И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, гл. Специальные функции, Москва, Физматгиз, 1962.
- [10] Н. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин, Сборник задач по высшей математике, части 1 и 2, Физматгиз, 1958.
- [11] Дж. Мэтьюз, Р. Уокер, Математические методы физики, Москва, Атомиздат, 1972.
- [12] М. Ф. Федорюк, Асимптотика: Интегралы и ряды, СМБ, Наука, Москва, 1987.
- [13] Ф. Олвер, Асимптотика и специальные функции, Наука, Москва, 1990.
- [14] Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы математической физики, в 2 т., ИЛ, Москва, 1958.
- [15] А. Найфэ, Методы возмущений, Мир, Москва, 1976.
- [16] Б. Г. Коренев, Введение в теорию бесселевых функций, Наука, Москва, 1971.
- [17] В. Босс, Уравнения математической физики, Эдиториал УРСС, Москва, 2016.