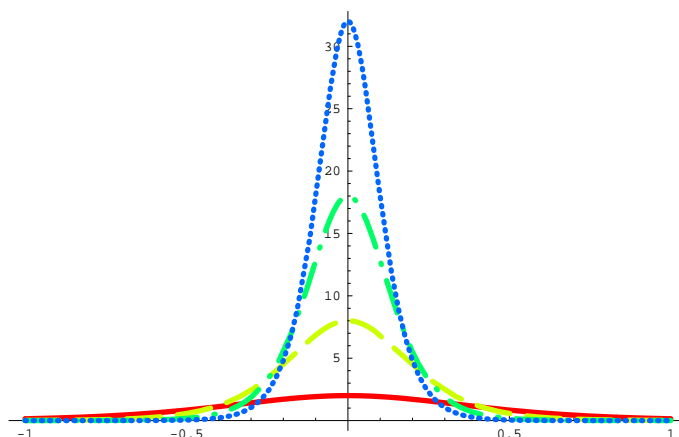


КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО
МАТЕМАТИЧЕСКИМ МЕТОДАМ ФИЗИКИ

Часть III: ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ

Д.А.Шапиро



Кафедра теоретической физики НГУ¹

¹8 ДЕКАБРЯ 2008 Г.

В стандартных курсах математической физики для физических факультетов изучаются разделы, разработанные 150 и более лет назад. Данный спецкурс познакомит с более современными методами, применяемыми в разных областях физики. Курс рассчитан на студентов 3–6 курсов, которые не потеряли интереса к математике. Курс состоит из трех разделов: первый знакомит с полезными асимптотическими методами, второй с солитонами и другими важными решениями нелинейных уравнений в частных производных, а третий — с простейшими операторными и групповыми методами квантовой физики.

В первом разделе рассказывается о построении решения дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. Если приравнять параметр к нулю, порядок уравнения понизится и уже не удастся построить решение, удовлетворяющее заданным граничным условиям. Вводится понятие пограничного слоя, который позволяет преодолеть эту трудность и построить равномерное разложение решения по малому параметру. Другим примером неравномерного разложения является квазиклассическое приближение вблизи классической точки поворота. Показано, как построить равномерное разложение с помощью обхода этой точки в комплексной плоскости (матрица Стокса).

Второй раздел начинается с задачи рассеяния для одномерного уравнения Шредингера. Далее выводится интегральное уравнение Гельфанда— Левитана— Марченко, которое решает обратную задачу восстановления потенциала по данным рассеяния. Приводятся примеры преобразований потенциальной энергии, оставляющих неизменным спектр оператора Шредингера. Строится пример солитонного решения уравнения Кортевега— де Фриза. Приводится также пример коллапса в двумерном нелинейном уравнении Шредингера, которое описывает самофокусировку света в нелинейной среде.

Операторные методы иллюстрируются двумя примерами из разных областей физики. Первый пример — построение функции Грина уравнения теплопроводности и уравнения Фоккера— Планка с помощью операторной экспоненты. Вводится понятие T -экспоненты и искомые функции записываются в виде Фейнмановского интеграла по путям. Интеграл вычисляется как вклад классической траектории, вдоль которой действие минимально. Второй пример — так называемая суперсимметричная квантовая механика. Это чисто алгебраический метод нахождения спектра одномерного уравнения Шредингера в таком потенциале, в котором оно точно решается.

В заключительной части вводится понятие группы симметрии уравнения в частных производных. Строятся матрицы генераторов группы Лоренца и неприводимые представления. Для иллюстрации из группы симметрии выводится уравнение для релятивистской частицы со спином $1/2$, уравнение Дирака.

Оглавление

1	Метод погранслоя	1
1.1	«Легкий» осциллятор	2
1.2	Переходной слой	4
1.3	Слой внутри области	7
2	Явление Стокса	9
2.1	Квазиклассическое приближение	9
2.2	Простая точка поворота	10
	Свойства матрицы перехода	12
2.3	Две простых точки поворота	14
3	Прямая задача рассеяния	18
3.1	Оператор Шредингера	19
3.2	Функции Йоста	20
3.3	Аналитические свойства	21
3.4	Переходная матрица	22
4	Обратная задача рассеяния	23
4.1	Треугольное представление	23
4.2	Уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко	25
4.3	Примеры	27
5	О методе обратной задачи рассеяния	29
5.1	Изоспектральное преобразование	29
5.2	Уравнение Лакса	30
5.3	Оператор \hat{B}	31
5.4	Метод обратной задачи рассеяния	32
6	Солитоны	34
6.1	Линейный потенциал Баргмана	34
6.2	Квадратичный потенциал Баргмана	36
6.3	Двухсолитонный пример	37

7	Теорема Таланова	39
7.1	Интегралы движения	39
	Число частиц	40
	Гамильтониан	40
	Уравнения Гамильтона	41
7.2	Уравнение движения	42
7.3	Теорема Таланова	43
8	Функция Грина как T-экспонента	44
8.1	Операторный метод	44
	Диагонализация оператора эволюции	44
	Хронологический оператор	45
8.2	Фейнмановский интеграл	46
	Классическая траектория	47
	Уравнение Фоккера—Планка	49
9	Операторный метод построения спектра	51
9.1	Суперзаряды	51
9.2	Суперсимметричный осциллятор	53
9.3	Уравнение Шредингера	55
10	Симметрия дифференциальных уравнений	62
10.1	Симметрия дифференциального оператора	62
10.2	Уравнение Гельмгольца	63
10.3	Оператор Даламбера	64
10.4	Группа Лоренца	65
11	Представления группы Лоренца	67
11.1	Связь с группой вращений	67
11.2	Генераторы	68
11.3	Неприводимые представления	69
12	Конструирование инвариантных уравнений	71
12.1	Инвариантная система уравнений	71
12.2	Минимизация числа уравнений	73
	Представление $D^{(00)}$	73
	Представление $D^{(\frac{1}{2}0)}$	73
	Представление $D^{(\frac{1}{2}0)} \oplus D^{(0\frac{1}{2})}$	73
12.3	Матрицы Дирака	74
	Литература	75
	Предметный указатель	78

ЛЕКЦИЯ 1

Метод погранслоя

Теория возмущений — это построение приближенных решений уравнения с малым параметром. Под вариантами теории возмущений понимают разложения в разных задачах и с малым параметром в разных местах. Вы уже знакомы с некоторыми вариантами, например, из аналитической механики [1] с методом усреднения и адиабатическими инвариантами, а из квантовой механики [2] со стационарной теорией возмущений и квазиклассическим приближением. В методе усреднения малой величиной является изменение решения за период, а теории адиабатических инвариантов — медленность изменения массы, длины или других параметров гамильтоновой системы. Квантовомеханическая теория возмущений находит спектры и волновые функции систем, мало отклоняющихся от точно решаемых. В квазиклассическом приближении малым параметром служит постоянная Планка \hbar , которую можно формально устремить к нулю для перехода к классическому пределу.

Разложить дифференциальное уравнение в ряд по степеням параметра $\varepsilon \rightarrow 0$, потом приравнять слагаемые с одинаковыми степенями ε не слишком сложно. Трудности возникают, если малый параметр входит при старшей производной. Например, в нелинейном уравнении второго порядка $\varepsilon y'' + f(y', y) = 0$ при $\varepsilon = 0$ порядок понижается и уже невозможно удовлетворить двум краевым или начальным условиям. Значит разложение работает не при всех x , т.е. не является равномерным.

Это означает, что имеется узкая область, где вторая производная настолько велика, что компенсирует малость параметра ε . Эта область называется *пограничным слоем*. В пограничном слое надо построить другое решение, а потом гладко сшить с решением уравнения первого порядка. Такая процедура называется методом пограничного слоя или методом *сращивания асимптотических разложений*. С математической точки зрения цель сращивания — получение равномерного разложения по степеням ε . Мы рассмотрим несколько примеров сращивания решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, а за общими теоремами и многочисленным примерам из гидродинамики и физики плазмы отошлем к книгам [3, 4].

1.1 «Легкий» осциллятор

Рассмотрим пример из механики, одномерный линейный осциллятор с коэффициентом трения α и пружиной жесткости k . Уравнение движения запишется как

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \quad (1.1)$$

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad (1.2)$$

где точкой обозначена производная по времени. Во второй строке (1.2) приведены начальные условия, которые нужны для построения фундаментального решения. Это решение поможет решить задачу Коши с произвольными начальными условиями. Пусть масса грузика m является малым параметром, а затухание α конечно.

Внешнее решение. При $m = 0$ из (1.1) получается уравнение первого порядка

$$\alpha\dot{x} + kx = 0. \quad (1.3)$$

Сравнивая оценки первого и второго слагаемого в уравнении (1.1), найдем, что второй производной можно пренебречь, если $t \gg m/\alpha$. Решение уравнения первого порядка $x^{out}(t) = C \exp(-kt/\alpha)$ содержит только одну константу C и поэтому не удовлетворяет граничным условиям (1.2). Тем не менее такое затухающее решение правильно описывает поведение грузика на больших временах, когда инерция несущественна, а играют роль только возвращающая сила со стороны пружины и трение. Это решение называется «внешним». Следует предположить наличие погранслоя на малых временах. Первое слагаемое в уравнении (1.1) можно оценить как $m\ddot{x} \sim mx/t^2$. Приравнявая эту оценку к последнему слагаемому, получим оценку толщины слоя $t \sim \sqrt{m/k}$, то есть слой возникает на первом периоде колебаний.

Внутреннее решение. Чтобы найти уравнение в пограничном слое, надо перейти к новому «быстрому» времени $\tau = \alpha t/m$. Тогда из (1.1) получится

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} + \frac{mk}{\alpha^2}x = 0.$$

Переходим к пределу $m \rightarrow 0$ при фиксированном τ . Безразмерный малый параметр равен $\varepsilon = mk/\alpha^2 \ll 1$. Последний член исчезает и получается уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{dx}{d\tau} = 0,$$

общее решение которого $x(\tau) = A + B \exp(-\tau)$, где A, B произвольные константы. Константы найдем из начальных условий (1.2): $A = -B = m/\alpha$. Частное решение

$$x^{in}(\tau) = \frac{m}{\alpha} (1 - e^{-\tau})$$

называется «внутренним». Решение в слое получилось естественным, потому что на малых временах, много меньших одного периода колебаний, возвращающая сила не сказывается, а отклонение грузика ограничивается только трением.

Сращивание. Выпишем оба решения вместе с их областями применимости

$$x(t) = \begin{cases} Ce^{-kt/m\gamma}, & t \gg m/\alpha, \\ m/\gamma(1 - e^{-\alpha t/m}), & t \ll \sqrt{m/\gamma}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Идея сращивания разложений состоит в том, что области применимости предельных случаев составного решения перекрываются. Имеется участок $m/\alpha \ll t \ll \sqrt{m/k}$, когда работают оба предельных случая. Оба неравенства могут выполняться одновременно, когда $\varepsilon = mk/\alpha^2 \ll 1$. На этом участке оба предела должны быть равными

$$(x^{in})^{out} = (x^{out})^{in}. \quad (1.5)$$

В общем виде условие сращивания означает, что внешний предел внутреннего решения совпадает с внутренним пределом внешнего решения.

В нашем примере надо в первой строке формулы (1.4) устремить $t \rightarrow 0$, а во второй строке $t \rightarrow \infty$. Тогда условие (1.5) дает $C = m/\gamma$. Теперь можно выписать приближенное решение в виде в единой формулы

$$x = x^{in} + x^{out} - (x^{in})^{out} = x^{in} + x^{out} - (x^{out})^{in}. \quad (1.6)$$

Из составного разложения надо вычесть общую часть внутреннего и внешнего решений, чтобы не учитывать ее дважды. В нашем примере получается

$$x = \frac{m}{\alpha} (e^{-kt/\alpha} - e^{-\alpha t/m}). \quad (1.7)$$

Упражнение 1. Исходное линейное уравнение (1.1) с постоянными коэффициентами решается точно. Найти решение, сделать предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ и оценить погрешность составного разложения.

Сравнение составного разложения с точным решением приведено на рис. 1.1. Видно, что наше приближение близко к точному решению и является гладкой функцией. Разложение равномерно стремится к точному решению при $\varepsilon \rightarrow 0$. Однако можно увеличить точность и при конечном ε , если удерживать во внутреннем и внешнем разложениях члены более высокого порядка по малому параметру ε .

Упражнение 2. Решить уравнение $\varepsilon y'' + (1 + \varepsilon)y' + y = 0$ с начальным условием $y(0) = 0, y'(0) = 1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, удерживая по два члена разложения по степеням ε .

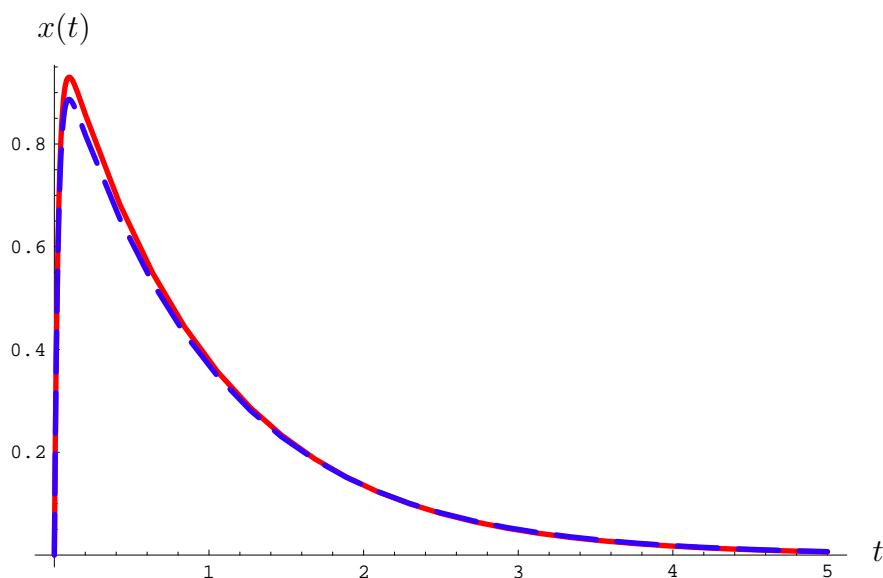


Рис. 1.1: Решение уравнения (1.1) с начальными условиями (1.2) при значениях малого параметра $\varepsilon = 0.025$: точное решение (сплошная линия), составное разложение (1.7) (пунктир).

1.2 Переходной слой

Иногда, чтобы получить равномерное разложение, надо учесть и промежуточную область между внутренним и внешним решениями. Эта область называется *переходным слоем*. Проиллюстрируем эту ситуацию на примере краевой задачи на отрезке $0 \leq x \leq 1$

$$\varepsilon^3 y'' + x^3 y' + (x^3 - \varepsilon)y = 0, \quad y(0) = \alpha, y(1) = \beta. \quad (1.8)$$

Характерный предел. Чтобы определить, сколько слоев надо принимать во внимание, надо сначала преобразовать уравнение к другому масштабу координаты по формуле

$$\xi = x/\varepsilon^\sigma,$$

где показатель степени σ нам пока неизвестен. Уравнение (1.8) преобразуется к виду

$$\varepsilon^{3-2\sigma} \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \varepsilon^{2\sigma} \xi^3 \frac{dy}{d\xi} + (\varepsilon^3 \xi^3 - \varepsilon)y = 0. \quad (1.9)$$

Чтобы перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и фиксированном ξ , надо проверить, какие степени в уравнении наименьшие. Для этого построим графики всех четырех показателей степени в отдельных слагаемых уравнения (1.9) от параметра σ , рис. 1.2.

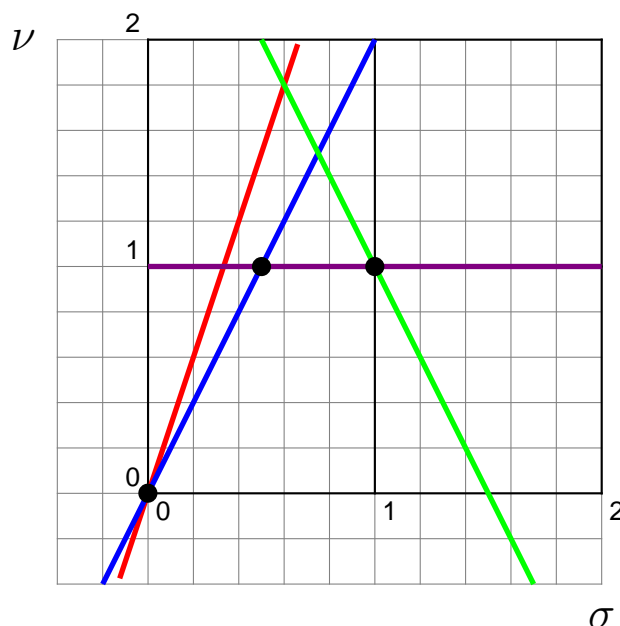


Рис. 1.2: Показатели степени ν как функции параметра σ : $\nu_1 = 3 - 2\sigma$, $\nu_2 = 2\sigma$, $\nu_3 = 3\sigma$, $\nu_4 = 1$. Точками показаны вершины многоугольника Ньютона.

Чтобы выбрать правильное значение параметра σ , надо соблюдать два правила. Во-первых, нас интересуют только наименьшие степени параметра ε , значит решение надо искать на самой нижней ломанной на рис. 1.2, точной нижней грани всего составного графика. Во-вторых, на ребрах ломанной какой-то один из показателей доминирует, значит после перехода к пределу останется одно слагаемое и не получится уравнения. Чтобы получилось уравнение, надо взять одну из вершин ломанной, точку пересечения ее соседних звеньев. Каждое из таких значений называют *характерным пределом*. В нашем примере таких точек три: $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = 1/2$, $\sigma_3 = 1$. Все они показаны на рисунке. Каждый характерный пример отвечает своему слою или масштабу преобразования. Поэтому метод иногда называют *методом многих масштабов*. Нижняя ломанная, проходящая через все точки, отвечающие характерным пределам, является частным случаем *многоугольника Ньютона*, выпуклой оболочки множества точек на плоскости.

Внешнее решение. Сначала рассмотрим $\sigma_1 = 0$, тогда $\xi = x$ и характерный предел уравнения (1.8) есть

$$x^3(y' + y) = 0.$$

Общее решение $y^{out} = Ce^{-x}$.

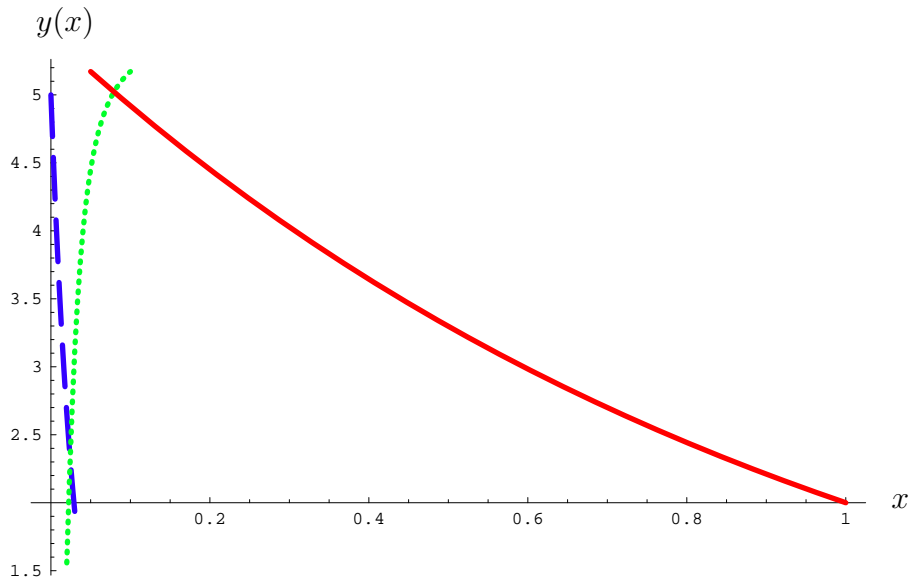


Рис. 1.3: Решение уравнения (1.8) в трех областях при $\varepsilon = 0.001$: в пограничном слое (штрихи), в промежуточном слое (точки) и в основной области (сплошная линия).

Промежуточное решение. При $\sigma_2 = 1/2$ в уравнении останутся второй и четвертый члены

$$\xi^3 \frac{dy}{d\xi} - y = 0.$$

Общее решение зависит от константы D : $y^{int} = D \exp(-1/2\xi^2)$.

Внутреннее решение. Пусть теперь $\sigma_3 = 1$, тогда в уравнении останутся первый и последний члены

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - y = 0.$$

Общее решение $y^{in} = Ae^{x/\varepsilon} + Be^{-x/\varepsilon}$ содержит две константы. Чтобы решение не возрастало при $x \gg \varepsilon$, надо выбрать $A = 0$.

Сращивание. Итак, мы знаем решение в слое, предслое и в основной области. Решение в предслое является внешним по отношению к решению в слое, а основное решение — внешним, по отношению к предслою. Поэтому у нас имеется два условия сращивания и два граничных. Их в общем случае условий хватит, чтобы найти все четыре константы. Получается $B = \alpha$, $D = C$, $Ce^{-1} = \beta$.

На рис 1.3 изображены все три решения. Из рисунка видно, что решение краевой задачи не монотонно. Промежуточная асимптотика в предслое связывает решение в пограничном слое и на основном отрезке. Без промежуточной асимптотики решить краевую задачу нам бы не удалось.

Упражнение 3. Найти характерные пределы и решить краевые задачи

$$\varepsilon y'' + y' - xy = 0, \quad y(0) = 0, y(1) = e^{1/2}.$$

$$\varepsilon y'' - y' = 2x, \quad y(0) = \alpha, y(1) = \beta.$$

1.3 Слой внутри области

Рассмотрим краевую задачу для нелинейного уравнения

$$\varepsilon y'' + yy' - y = 0, \quad y(0) = -1, y(1) = 1. \quad (1.10)$$

Внешнее решение. При $\varepsilon \rightarrow 0$ получается нелинейное уравнение первого порядка $y(y' - 1) = 0$, имеющее помимо нулевого решение в виде линейной функции $y = A + x$. Чтобы выполнить условие при $x = 0$, надо выбрать $A = -1$. Чтобы выполнить условие при $x = 1$, надо выбрать $A = 0$. Общего универсального значения нет, поэтому надо выбрать разные A возле левой и правой границ и найти, где происходит переход.

Внутреннее решение. Выберем $\sigma = 1$, $\xi = x/\varepsilon$ и получим характерный предел

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + y \frac{dy}{d\xi} = 0.$$

Это уравнение один раз интегрируется

$$\frac{dy}{d\xi} + \frac{y^2}{2} = C.$$

Выберем положительную константу $C = \gamma^2/2$. Интегрируя уравнение второй раз, получаем ступеньку в форме гиперболического тангенса

$$y = \gamma \operatorname{th}[(\xi - a)/2].$$

Кроме половины величины скачка γ появилась вторая константа a , положение слоя.

Сращивание. Теперь при $\xi \rightarrow \infty$ решение должно перейти в $y = x$, а при $\xi \rightarrow -\infty$ в $y = x - 1$. Константы должны тогда удовлетворять системе уравнений

$$-\gamma = a - 1, \quad \gamma = a.$$

Складывая и вычитая уравнения, найдем $a = \gamma = 1/2$. При $C < 0$ мы бы получили гиперболический котангенс, который бы нам понадобился, если бы из

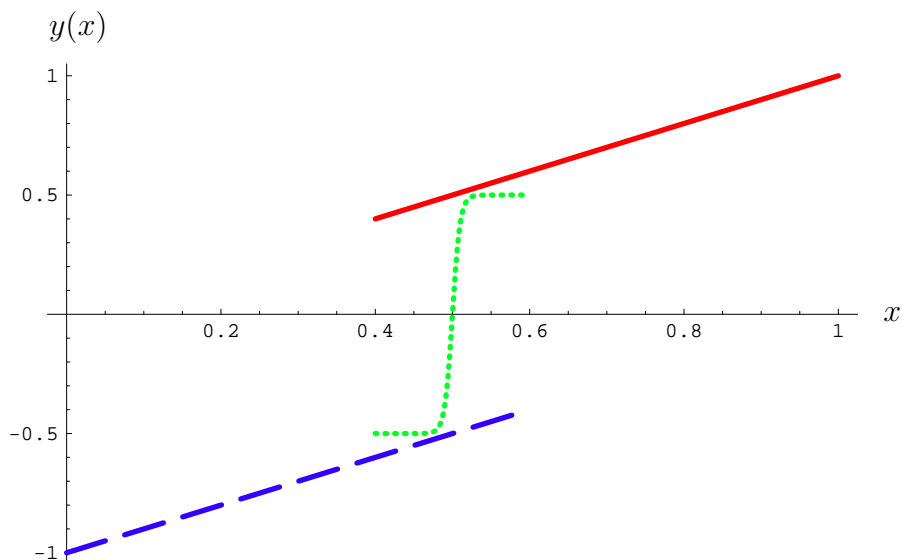


Рис. 1.4: Решение уравнения (1.10) в трех областях при $\varepsilon = 0.005$: в левой части (штрихи), в пограничном слое (точки) и в правой части сегмента (сплошная линия).

граничных условий следовало, что решение справа от слоя меньше, чем решение слева.

Графики решений изображены на рис. 1.4, из которого видно как скачком через слой осуществляется переход от одного основного решения к другому. В условиях нашего примера слой расположен точно в середине отрезка.

Упражнение 4. Проинтегрировать уравнение (1.10) и нарисовать его фазовый портрет на плоскости (y, y') . Найти там области тангенса и котангенса.

ЛЕКЦИЯ 2

Явление Стокса

Рассмотрим еще одно применение асимптотических методов — квазиклассическое приближение. Если рассматривать его в комплексной плоскости, то построение равномерного разложения становится непростой задачей. Ниже рассмотрено несколько примеров, поясняющих, как строить равномерные разложения. Более подробное изложение правил обхода простой точки поворота и решения задачи о подбарьерном прохождении можно найти в конспекте [5]. Другие примеры из квантовой механики приведены в учебнике [6]. Общий математический подход с полной классификацией матриц перехода изложен в книге [7], примеры из теории специальных функций см. в [8].

2.1 Квазиклассическое приближение

Одномерное уравнение Шредингера

$$\psi'' + k^2\psi = 0, \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - U) \quad (2.1)$$

для частицы с энергией E в потенциале $U(x)$ чаще всего не решается точно, но можно построить асимптотическое разложение решения при $k \rightarrow \infty$. Вместо

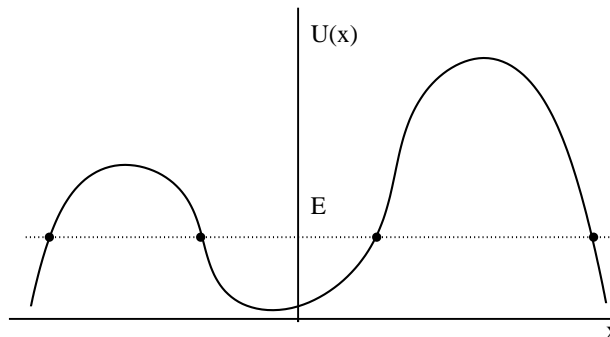


Рис. 2.1: Потенциальная энергия U как функция координаты x .

больших k можно формально также рассматривать малые $\hbar \rightarrow 0$, поэтому полученное разложение называется *квазиклассическим приближением*. Разложение, особенно его старшие порядки, удобнее всего строить, если ввести новую неизвестную функцию $w(x) = \psi'/\psi$. Дифференцируя w , получаем из (2.1) уравнение Рикатти

$$w' + k^2(x) + w^2 = 0. \quad (2.2)$$

Ищем теперь решение в виде ряда по степеням $1/k$:

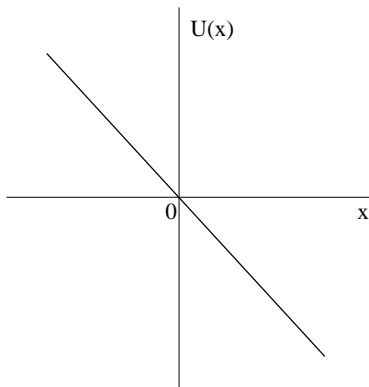
$$w = w_0 + w_1 + w_2 + \dots,$$

где $w_0 \sim k$, $w_1 \sim 1$, $w_2 \sim 1/k$, и т.д. Подставляя ряд в (2.2) и приравнивая члены равного порядка, найдем последовательно $w_0 = \pm ik$, $w_1 = k'/2k$ и т.д. Остальными членами можно пренебречь, если $k'/k \ll k$, т.е. длина волны де Бройля $\lambda = 2\pi/k$ медленно меняется с координатой $d\lambda/dx \ll 1$. Фундаментальная система решений получается интегрированием

$$\psi_{\pm} = \frac{e^{\pm iS}}{\sqrt{k}}, \quad S = \int k(x) dx. \quad (2.3)$$

Условие применимости нарушается в окрестности классических *точек поворота*, где $k^2 = 0$, т.е. потенциальная энергия равна полной. На рисунке 2.1 показан пример потенциальной кривой, а уровень энергии изображен точками. Всего в примере 4 классических точки поворота, три классически доступные ($E > U$) и две классически запрещенные области ($E < U$). Чтобы гладко сшить решения в разрешенных и запрещенных областях, точку поворота обходят в комплексной плоскости. Надо выбрать контур обхода достаточно далеко от точки поворота, чтобы выполнялось квазиклассическое приближение, но достаточно близко, чтобы можно было пользоваться линейным членом разложения потенциала в окрестности точки поворота [2]. Для обхода точки поворота пользуются методом эталонных уравнений, простейшее из которых мы сейчас рассмотрим.

2.2 Простая точка поворота



Простой точкой поворота x_0 (или точкой поворота порядка $q = 1$) называется такая, в которой $k(x_0) = 0$, $U'(x_0) \neq 0$. Если разложить $k^2(x) \approx -2mU'(x_0)(x - x_0)/\hbar^2$, отсчитывать координату x от точки поворота, а вместо x писать комплексную переменную z , уравнение Шредингера в окрестности простой точки поворота сведется к эталонному уравнению

$$\psi'' + cz\psi = 0, \quad (2.4)$$

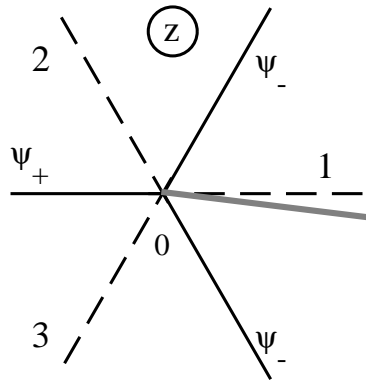


Рис. 2.2: Стоксовы (пунктир) и антистоксовы (сплошные) линии в окрестности простой точки поворота.

где c постоянная. Точное решение уравнения выражается через функцию Эйри. Нас, однако, интересует приближенное решение

$$\psi = A\psi_+ + B\psi_-, \quad \psi_{\pm} = z^{-1/4} e^{\pm iS}, \quad S = Cz^{3/2},$$

где $C = 2\sqrt{c}/3$, A, B — постоянные. Обратим внимание, что в приближенном решении получились дробные степени z . Чтобы использовать приближение, надо разрезать комплексную плоскость по лучу $(0, \infty)$, тогда как точное решение является аналитической функцией. Разрез проведем для определенности чуть ниже положительной действительной полуоси и изобразим на рис. 2.2 серой полосой.

Нарисуем также линии, на которых обращается в нуль вещественная и мнимая части фазы S . Будем называть здесь *стоксовыми линиями* такие, на которых $\text{Im } S = 0$, и изображать их пунктиром. *Антистоксовыми линиями* назовем такие кривые, на которых $\text{Re } S = 0$, и изобразим их сплошными линиями. На стоксовых линиях оба решения ψ_{\pm} осциллируют, как в классически разрешенной области, и имеют один и тот же порядок величины. На антистоксовых линиях одно из решений растет при увеличении $|z|$ (назовем его *доминантным*), а другое экспоненциально убывает (*субдоминантное*). Аналогично, решение состоит из двух действительных экспонент в классически запрещенной области, причем одной из них мы обязаны пренебречь, потому что учет экспоненциально малых членов в асимптотическом разложении был бы превышением точности. Только на линиях Стокса мы должны учитывать оба решения.

В нашем случае, если обозначить $\rho = |z|$, $\theta = \arg z$, получится

$$S = C\rho^{3/2} e^{3i\theta/2} = C\rho^{3/2} \left(\cos \frac{3\theta}{2} + i \sin \frac{3\theta}{2} \right).$$

Три стоксовы линии пройдут при $\theta = 0, \pm 2\pi/3$, а три антистоксовы — при $\theta = \pm \pi/3, \pi$. В общем случае из точки поворота порядка q ($U' = U'' = \dots = 0, U^{(q)} \neq$

0) выходит $q + 2$ линии Стокса, а углы между соседними линиями составляют $2\pi/(q + 2)$. Линии Стокса могут начинаться и кончаться только в точках поворота или на бесконечности. Совокупность всех точек поворота и линий Стокса назовем *графом Стокса*. Антистоксовы линии пройдут между стоксовыми. Если граф Стокса известен, антистоксовы линии всегда можно дорисовать.

В каждом секторе между линиями Стокса при $\rho \rightarrow \infty$ доминирует свое решение: в секторе 1–2 $|\psi_-| \gg |\psi_+|$, в секторе, наоборот, 2–3 $|\psi_+| \gg |\psi_-|$, в секторе 3–1 снова $|\psi_-| \gg |\psi_+|$. На рисунке 2.2 доминантное решение подписано в середине каждого сектора возле антистоксовых линий. Если мы поступим по правилам и отбросим субдоминантные решения, разложение получится неравномерным по аргументу θ . Попробуем сделать иначе, удержим экспоненциально малое решение, которое не испортит асимптотического разложения в своем секторе. Зато при этом решение можно будет продолжить в соседний сектор, где субдоминантное решение становится доминантным. Впрочем, продолжить можно не далее, чем до ближайшей антистоксовой линии в середине следующего сектора, где оба решения одного порядка, удержанное решение перестанет быть малым и приведет к ошибке. Чтобы можно было продолжить решение дальше в смежный сектор, надо после пересечения линии Стокса выбрать другую линейную комбинацию фундаментальных решений. Коэффициенты разложения в различных секторах связаны линейным преобразованием.

Ищем решение в секторе 1–2 в виде $\psi = A_1\psi_+ + B_1\psi_-$, в секторе 2–3 $\psi = A_2\psi_+ + B_2\psi_-$, а в секторе 3–1 $\psi = A_3\psi_+ + B_3\psi_-$. При переходе из сектора в следующий сектор коэффициенты умножаются на *матрицу перехода*

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \Omega_{21} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix} = \Omega_{32} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} = \Omega_{13} \begin{pmatrix} A_3 \\ B_3 \end{pmatrix}.$$

Свойства матрицы перехода

1. Коэффициент при доминантном решении сохраняется.
2. Если бы доминантного решения не было, сохранялся бы коэффициент при субдоминантном.
3. К коэффициенту при субдоминантном решении добавляется коэффициент при доминантном, умноженный на константу.

Свойства 1, 2 непосредственно следуют из нашего рассмотрения, а свойство 3 из 1, 2. Из свойств можно получить вид матрицы перехода. В частности, $B_2 = B_1$ (по свойству 1). Коэффициент A_2 в секторе 2–3 дается линейной комбинацией $A_2 = A_1 + \alpha B_1$, потому что в первом секторе доминирует решение ψ_- , а значит коэффициент A_1 при субдоминантном решении сохранялся бы при $B_1 = 0$ (по свойству 2). Скачок коэффициентов на линиях Стокса называется *явлением Стокса*, а неопределенный пока коэффициент α — *константой Стокса*.

В соответствии со свойствами матрицы перехода имеют вид

$$\Omega_{21} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_{13} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

При полном обходе точки поворота мы пересечем разрез. Вычислим скачок на разрезе при переходе с нижнего берега на верхний. Вместо пересечения разреза можно изменить аргумент числа $z \rightarrow ze^{-2\pi i}$, тогда множитель перед экспонентами умножится на $-i$: $z^{1/4} \rightarrow z^{1/4}e^{-\pi i/2}$. Показатели экспонент сменяют знаки: $z^{3/2} \rightarrow z^{3/2}e^{3\pi i} = -z^{3/2}$. Тогда после полного обхода в положительном направлении решения перейдут друг в друга с точностью до множителя i

$$\psi_+ \rightarrow i\psi_-, \quad \psi_- \rightarrow i\psi_+.$$

Значит произведение всех трех матриц перехода должно быть равно

$$\Omega_{13}\Omega_{32}\Omega_{21} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

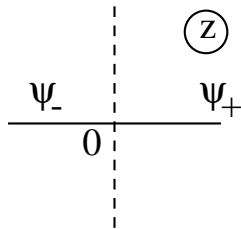
Перемножая матрицы (2.5), получим систему 3 уравнений на α , из которой находится константа Стокса $\alpha = i$.

Упражнение 5. Показать, что в общем случае точки поворота порядка q константа Стокса равна

$$\alpha = 2i \cos \frac{\pi}{q+2}. \quad (2.6)$$

Рассмотрим два примера

1. Точка нулевого порядка ($q = 0$):



$$\psi'' - \kappa^2\psi = 0, \quad \kappa = \text{const} \neq 0.$$

Решения $\psi_+ = e^{\kappa z}$, $\psi_- = e^{-\kappa z}$, линии Стокса — мнимая ось $\text{Re } z = 0$. Если оставлять только доминирующее решение, то в правой полуплоскости $\psi \sim \psi_+$, а в левой $\psi \sim \psi_-$. Оба решения теряют применимость на мнимой оси.

Для построения равномерного по $\arg z$ решения надо найти константу Стокса. В левой полуплоскости обозначим $\psi_1 = A_1\psi_+ + B_1\psi_-$, в правой: $\psi_2 = A_2\psi_+ + B_2\psi_-$. Матрицы перехода

$$\Omega_{21} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

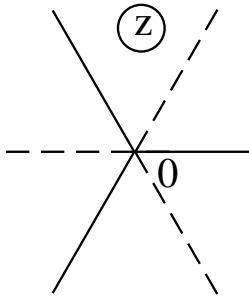
при перемножении должны давать единичную матрицу, откуда

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 + \alpha^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 0.$$

Из формулы (2.6) константа Стокса тоже получается нулевой.

2. Уравнение Эйри с точкой поворота первого порядка ($q = 1$):

$$\psi'' - z\psi = 0.$$



Классически доступная область, где проходит линия Стокса, находится при $z = x < 0$, так что граф Стокса рис. 2.2 получится повернутым на 180° . Получилась асимптотика функции Эйри в классически запрещенной области

$$\text{Ai}(z) \approx \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}}, \quad |z| \rightarrow +\infty, \quad |\arg z| < \frac{2\pi}{3}.$$

Вместо того, чтобы отдельно находить асимптотику в классически разрешенной области $z = -|x| \rightarrow -\infty$, мы теперь, зная константу Стокса, можем продолжить асимптотику из классически запрещенной области в соседний сектор

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) &\approx \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}|x|^{3/2}e^{3\pi i/2}\right) + i \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \exp\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2}e^{3\pi i/2}\right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \left[\exp\left(\frac{2}{3}i|x|^{3/2}\right) + \exp\left(-\frac{2}{3}i|x|^{3/2}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \cos\left(\frac{2}{3}|x|^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Полученная асимптотика, естественно, совпадает с результатами метода перевала и метода стационарной фазы.

Отсюда следует правило перехода из классически запрещенной в разрешенную область: затухающая экспонента заменяется удвоенным косинусом

$$\frac{A}{2k^{1/2}} \exp\left(-\int k(x) dx\right) \longrightarrow \frac{A}{k^{1/2}} \cos\left(\int k(x) dx - \frac{\pi}{4}\right).$$

Когда ответ уже известен, можно сформулировать это правило и по-другому: следует обойти простую точку поворота сверху и снизу и сложить ответы. Действительно, при таких обходах $z \rightarrow ze^{\pm i\pi}$, $z^{3/2} \rightarrow z^{3/2}e^{\pm 3\pi i/2} = \mp iz^{3/2}$, откуда

$$\text{Ai}(-x) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \left[\exp\left(\frac{2}{3}i|x|^{3/2} - i\frac{\pi}{4}\right) + \exp\left(-\frac{2}{3}i|x|^{3/2} + i\frac{\pi}{4}\right) \right].$$

В квантовой механике встречаются задачи с различным числом точек поворота. Квазиклассическое приближение в комплексной плоскости строится, если сначала изобразить соответствующий граф Стокса. В следующем разделе мы рассмотрим две задачи с двумя точками поворота: о прохождении через барьер и об уровнях энергии в потенциальной яме.

2.3 Две простых точки поворота

1. В одномерной задаче рассеяния предполагается, что на бесконечности, где $U \rightarrow 0$, Фундаментальная система решений уравнения Шредингера

$$\psi_{\pm} = \frac{e^{\pm i \int k(x') dx'}}{\sqrt{k(x)}}$$

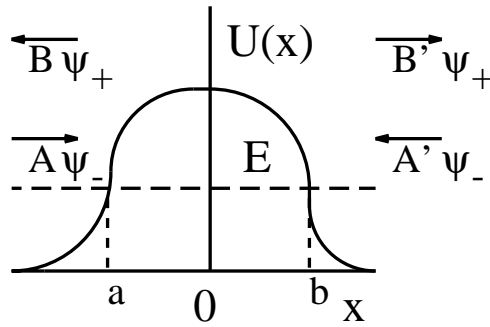


Рис. 2.3: Потенциальный барьер. Пунктирная горизонтальная линия обозначает полную энергию, стрелками показаны сходящаяся и расходящаяся волна.

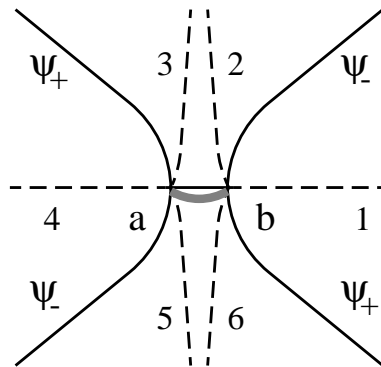


Рис. 2.4: Граф Стокса для задачи о прохождении через потенциальный барьер. Серой полосой обозначен разрез.

состоит из сходящейся волны $\psi_- \rightarrow e^{-ik_0|x|}$ и расходящейся $\psi_+ \rightarrow e^{+ik_0|x|}$, $k_0 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. На рисунке 2.3 показаны две точки поворота a, b . Слева от барьера $\psi(x \rightarrow -\infty) = A\psi_- + B\psi_+$, справа $\psi(x \rightarrow +\infty) = A'\psi_- + B'\psi_+$. Если волна падает слева, то $A' = 0$. Тогда коэффициенты отражения R и прохождения T определяются через отношение коэффициентов разложения волновой функции

$$R = \left| \frac{B}{A} \right|^2, \quad T = \left| \frac{B'}{A} \right|^2.$$

Построение равномерного разложения начнем с графа Стокса. Для изображения качественной картины (рис. 2.1) достаточно симметричных соображений. Вблизи каждой точки поворота картина должна выглядеть, как при $q = 1$, т.е. три линии Стокса должны выходить под углом 120° друг к другу. Вдали, когда $|z| \gg b - a$, картина должна быть с четырьмя линиями Стокса под углом 90° , как от точки порядка $q = 2$. Базисные волновые функции для точки с $q = 2$ имеют вид

$$\psi_{\pm} = z^{-1/2} e^{\pm iz^2}.$$

Стартуя с линии Стокса 1, обойдем разрез в положительном направлении. В секторе 1–2 доминирует решение ψ_- , поэтому

$$\Omega_{21} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В секторе 2–3 матрица перехода единичная, потому что, проходя этот сектор, мы не пересекаем антистоксову линию. Чтобы продолжить обход, надо сменить начало отсчета — перейти от точки b к точке a . Волновая функция умножится на экспоненту

$$\psi_{\pm} \rightarrow \psi_{\pm} \exp \left[\pm i \int_b^a k(x') dx' \right] = \psi_{\pm} e^{\pm \Phi}, \quad \Phi = \int_a^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (U(x) - E)} dx,$$

где Φ — *фазовый интеграл*. Иногда и сам метод построения равномерной квазиклассической асимптотики называют методом фазовых интегралов. Значит, матрица перехода будет

$$\Omega_{32} = \begin{pmatrix} e^{\Phi} & 0 \\ 0 & e^{-\Phi} \end{pmatrix}.$$

В секторе 3–4 доминирует решение ψ_+ . Поэтому матрица перехода

$$\Omega_{43} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы уже обошли половину окружности и получили

$$\Omega_{41} = \Omega_{43} \Omega_{32} \Omega_{21} = \begin{pmatrix} e^{\Phi} & \alpha e^{\Phi} \\ \alpha e^{\Phi} & \alpha^2 e^{\Phi} + e^{-\Phi} \end{pmatrix}.$$

Чтобы замкнуть контур и вернуться на линию Стокса 1, надо возвести матрицу Ω_{41} в квадрат. С другой стороны, предэкспонента при обходе изменит знак: $z^{-1/2} \rightarrow z^{-1/2} e^{-i\pi}$, значит

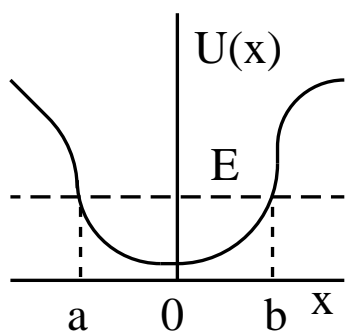
$$\Omega_{41}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из получившейся системы уравнений находим константу Стокса $\alpha = i\sqrt{1 + e^{-2\Phi}}$. Теперь мы знаем матрицу

$$\Omega_{41} = e^{\Phi} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & -1 \end{pmatrix},$$

которая осуществляет переход от волновой функции слева от барьера к волновой функции справа: $A' = e^{\Phi}(A + \alpha B)$, $B' = e^{\Phi}(\alpha A - B)$. Из условия $A' = 0$ найдем $B/A = -1/\alpha$ и $B'/A = e^{\Phi}(\alpha + 1/\alpha)$, откуда получим известные квазиклассические формулы для коэффициентов отражения и прохождения

$$R = \frac{1}{1 + e^{-2\Phi}}, \quad T = \frac{1}{1 + e^{+2\Phi}}.$$

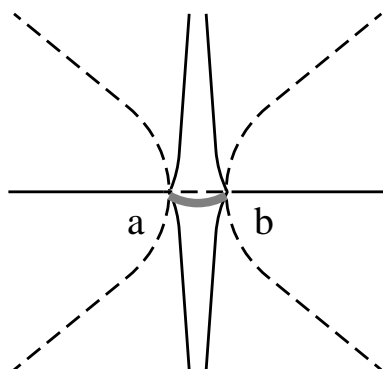


2. В задаче о частице в потенциальной яме, в отличие от барьера (рис. 2.3), классически разрешенная область находится внутри интервала $[a, b]$, поэтому стоксовы и антистоксовы линии графа Стокса 2.4 поменяются местами. При обходе по контуру Γ вокруг разреза базисные функции ψ_{\pm} умножатся на $e^{\pm i\Psi}$, где

$$\Psi = \oint_{\Gamma} k(z) dz = 2 \int_a^b \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E - U(x))} dx.$$

У каждого решения должен измениться знак, поэтому $\Psi = 2\pi n + \pi$. Получается условие квантования Бора—Зоммерфельда.

Таким образом, задача о построении равномерного квазиклассического разложения в комплексной плоскости проводится в три этапа



1° **ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.** Построение графа Стокса.

2° **АНАЛИТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.** Нахождение константы Стокса методом эталонных уравнений.

3° **АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ.** Умножение матриц перехода.

ЛЕКЦИЯ 3

Прямая задача рассеяния

В квантовой механике, оптике, геофизике и многих других разделах физики одной из центральных задач является задача рассеяния. Прямая задача — это вычисление данных рассеяния по параметрам рассеивающей системы. Обратная задача — это реконструкция системы по набору данных рассеяния.

В классической механике пример прямой задачи рассеяния — это определение периода колебаний T во заданному потенциалу $U(x)$. Обратная задача состоит в восстановлении потенциала по заданной зависимости периода колебаний от энергии $T(E)$ [1]. В квантовой механике одномерная прямая задача сводится к вычислению коэффициентов прохождения и отражения по заданному потенциалу $U(x)$ [2]. Обратная задача значительно сложнее прямой и решена только в 1950-х годах в одномерном случае Гельфандом, Левитаном и Марченко. Сложность состояла в поиске набора данных рассеяния, достаточных для восстановления потенциала.

Интерес к задаче рассеяния в математической физике связан с разработанным в 1970-х годах методом обратной задачи рассеяния для решения нелинейных уравнений в частных производных. Мы рассмотрим как решается прямая и обратная задача рассеяния для одномерного уравнения Шредингера. Изложение с точностью до знаков согласуется со сборником задач [9], но здесь мы проделаем вычисления более подробно.

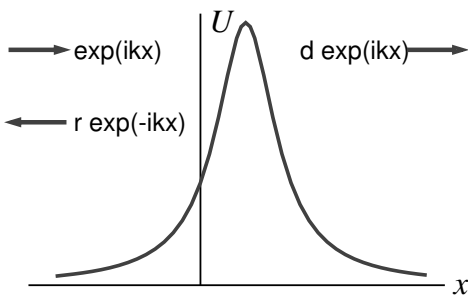
Подробное и строгое изложение теории можно найти в книге [10], посвященной методу обратной задачи рассеяния. Вывод можно найти и в других книгах по теории солитонов [11–13]. Менее строгое, но простое изложение, снабженное многочисленными простыми примерами, содержится в книге [14].

3.1 Оператор Шредингера

Одномерное уравнение Штурма—Лиувилля возникает в квантовой механике как стационарное уравнение Шредингера

$$\hat{L}\psi = -k^2\psi, \quad \hat{L} = \frac{d^2}{dx^2} - U(x), \quad (3.1)$$

где $k^2 = E$ — энергия частицы, $U(x)$ — потенциальная энергия, $\psi(x)$ волновая функция стационарного состояния. Волновая функция зависит от k как от параметра. Уравнения записаны в безразмерных единицах, т.е. в такой системе единиц, где $2m/\hbar^2 = 1$.



Прямая задача рассеяния для уравнения (3.1) ставится следующим образом. При $x \rightarrow -\infty$ имеются падающая и отраженная волны, бегущие влево и вправо, а при $x \rightarrow \infty$ имеется только прошедшая волна, бегущая вправо. Коэффициент отражения r находится как отношение амплитуд падающей и отраженной волн, а коэффициент прохождения d — отношение амплитуд прошедшей и падающей волн. Это так называемая левая задача рассеяния. В результате ее решения мы найдем левый коэффициент отражения.

Аналогично можно поставить задачу о правом коэффициенте отражения.

Пример 3.1. Найдем коэффициент отражения точечного отражателя $U(x) = G\delta(x)$, расположенного в начале координат. Ищем решение уравнения (3.1) в виде

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + r e^{-ikx}, & x < 0; \\ d e^{ikx}, & x > 0. \end{cases}$$

При $x = 0$ волновая функция должна быть непрерывной, а производная терпит скачок $G\psi(0)$, откуда

$$1 + r = d, \quad ik(d - 1 + r) = Gd.$$

Получаем коэффициенты отражения и прохождения

$$r = \frac{G}{2ik - G}, \quad d = \frac{2ik}{2ik - G},$$

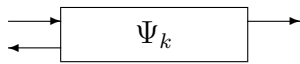
которые удовлетворяют закону сохранения энергии

$$|r|^2 + |d|^2 = 1. \quad (3.2)$$

3.2 Функции Йоста

Чтобы формализовать постановку прямой задачи рассеяния, введем функцию Йоста. Это частное решение уравнения Шредингера (3.1) в другой нормировке, с заданной асимптотикой на бесконечности:

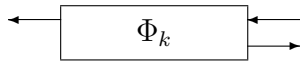
$$\Psi_k(x) \rightarrow e^{ikx}, \quad x \rightarrow +\infty. \tag{3.3}$$



На $+\infty$ имеется только прошедшая волна e^{ikx} , а на $-\infty$ падающая e^{ikx} и отраженная волна e^{-ikx} . Стрелки на рисунке означают волны, бегущие направо и налево, а прямоугольник — область взаимодействия. Эта функция соответствует левой задаче рассеяния. Нормировка другой функция Йоста Φ_k подбирается на $-\infty$

$$\Phi_k(x) \rightarrow e^{-ikx}, \quad x \rightarrow +\infty. \tag{3.4}$$

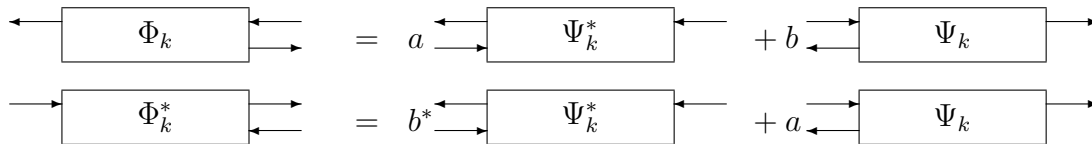
Вторую функцию Йоста можно изобразить аналогичной пиктограммой тремя стрелками. Такая функция отвечает правой задаче рассеяния, потому что слева имеется только уходящая волна.



В качестве фундаментальной системы решений можно выбрать пару функций Ψ_k^*, Ψ_k , имеющие определенные асимптотики на $+\infty$. Тогда решение Φ_k можно разложить по полной системе, обозначив коэффициенты разложения буквами a, b

$$\begin{aligned} \Phi_k &= a(k)\Psi_k^* + b(k)\Psi_k, \\ \Phi_k^* &= b^*(k)\Psi_k^* + a^*(k)\Psi_k. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Второе соотношение получается из первого комплексным сопряжением. Эти соотношения можно представить графически с помощью пиктограмм.



Из рисунков видно, что означает разложение решения правой задачи рассеяния по решениям левой. Коэффициенты a, b надо подобрать так, чтобы амплитуда волны, входящей слева, обратилась в нуль. Когда коэффициенты подобраны, справа от области взаимодействия остается падающая волна с амплитудой a и уходящая волна с амплитудой b , а слева — только уходящая волна с амплитудой 1. Тогда правые коэффициенты отражения r и прохождения d даются формулами

$$r(k) = \frac{1}{a(k)}, \quad d(k) = \frac{b(k)}{a(k)}. \tag{3.6}$$

Отсюда следует, что закон сохранения энергии (3.2) можно записать для амплитуд

$$|a|^2 - |b|^2 = 1. \tag{3.7}$$

Из (3.3), (3.4), (3.5) следует, что

$$\Phi_k(x) \rightarrow \begin{cases} e^{-ikx}, & x \rightarrow -\infty \\ a(k)e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}, & x \rightarrow +\infty \end{cases}, \quad (3.8)$$

3.3 Аналитические свойства

Формулы разложения функций Йоста (3.5) выписаны для действительного k . В этом случае комплексное сопряжение делается простым переворачиванием стрелок на рисунке, т.е. заменой $k \rightarrow -k$. Отсюда следуют равенства

$$a(-k) = a^*(k), \quad b(-k) = b^*(k).$$

Прежде, чем мы перейдем к комплексную плоскость переменной k , надо узнать, могут ли функции Йоста аналитически продолжены с вещественной оси. Можно выполнить аналитическое продолжение с помощью интегрального уравнения.

Если рассматривать потенциал как возмущение, можно найти функцию Грина невозмущенного оператора $d^2/dx^2 + k^2$. В левой задаче рассеяния отраженная волна взаимодействует с падающей в точках $x' > x$, поэтому надо искать функцию Грина, которая обращается в нуль при $x' < x$:

$$G_0(x, x') = \begin{cases} -\frac{\sin k(x-x')}{k}, & x < x'; \\ 0, & x > x'. \end{cases} \quad (3.9)$$

С помощью функции Грина (3.9) можно записать решение уравнения Шредингера — функцию Йоста Ψ_k в виде интегрального уравнения

$$\Psi_k(x) = e^{ikx} + \int_x^\infty G_0(x, x') \Psi_k(x') dx'.$$

Получилось уравнение Вольтерра, потому что функция Грина исчезает при $x > x'$. Перейдем к вспомогательной функции $\chi_k(x) = \Psi_k(x)e^{-ikx}$, для которой получается интегральное уравнение

$$\chi_k(x) = 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^\infty (1 - e^{2ik(x'-x)}) \chi_k(x') dx'.$$

Поскольку в области интегрирования $x' > x$, к параметру k под интегралом можно добавить только положительную мнимую часть, которая только улучшает сходимость интеграла. Отрицательную мнимую часть мы добавить не можем, потому что интеграл может стать расходящимся. Отсюда следует, что вспомогательную функцию $\chi_k(x)$, а с ней и функцию Йоста Ψ_k можно аналитически продолжить в верхнюю полуплоскость. Аналогичное утверждение справедливо и

для функции Йоста Φ_k . В то же время комплексно сопряженные функции Ψ_k^*, Φ_k^* можно аналитически продолжить в нижнюю полуплоскость.

Итак, функции Ψ_k, Φ_k аналитичны в верхней полуплоскости. Перейдем к коэффициентам $a(k)$. В силу линейности разложения (3.5) коэффициент может быть представлен в виде вронскиана

$$a(k) = \frac{1}{2ik} W\{\Phi_k, \Psi_k\}, \quad W\{\Phi_k, \Psi_k\} = \begin{vmatrix} \Phi_k(x) & \Psi_k(x) \\ \Phi_k'(x) & \Psi_k'(x) \end{vmatrix}.$$

Следовательно, функция $a(k)$ тоже аналитична в верхней полуплоскости. В некоторых точках функция может даже обратиться в нуль $a(k_n) = 0$. В этих точках функции Ψ_{k_n}, Φ_{k_n} линейно зависимы, то есть

$$\Psi_{k_n} = C_n \Phi_{k_n}. \quad (3.10)$$

С другой стороны, как следует из (3.3), (3.4) в этих точках решение убывает при $x \rightarrow \pm\infty$. Значит эти точки отвечают связанным состояниям. Связанные состояния бывают при отрицательной энергии $E_n = k_n^2 < 0$, значит все точки k_n лежат на мнимой оси, точнее, на ее положительной полуоси: $k_n = i\kappa_n, \kappa_n > 0$. В следующей лекции мы покажем, что непрерывные функции $a(k), b(k)$ при действительном k вместе с дискретным набором C_n, κ_n и образуют искомый полный набор данных рассеяния.

3.4 Переходная матрица

Соотношения (3.5) можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \Phi_k \\ \Phi_k^* \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \Psi_k^* \\ \Psi_k \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & a^* \end{pmatrix},$$

где T называется *переходной матрицей*. Из закона сохранения (3.7) следует, что $\det T = 1$. Поэтому матрица T — обобщенно-унитарная (или псевдоунитарная). В элементах такой матрицы содержатся все данные рассеяния.

ЛЕКЦИЯ 4

Обратная задача рассеяния

4.1 Треугольное представление

Невозмущенное решение $\psi_0(x) = e^{ikx}$ известно, тогда возмущенное решение уравнения Шредингера можно с помощью функции Грина (3.9) записать в виде борновского ряда

$$\begin{aligned} \Psi_k(x) = & \psi_0(x) + \int G_0(x, x')U(x')\psi_0(x') dx' + \\ & + \iint G_0(x, x')U(x')G_0(x', x'')\psi_0(x'') dx'dx'' + \dots \end{aligned}$$

Этот же ряд можно переписать как *треугольное представление* функции Йоста

$$\Psi_k(x) = e^{ikx} + \int_x^\infty K(x, y)e^{iky} dy, \quad (4.1)$$

где действительное ядро $K(x, y)$ представляет собой такую же бесконечную сумму борновского ряда

$$K(x, y) = G_0(x, y)U(y) + \int dx' G_0(x, x')U(x')G_0(x', y)U(y) + \dots$$

Слагаемые этого ряда соответствуют однократному, двукратному и т.д. рассеянию частицы на потенциале $U(x)$. Представление (4.1) называется *треугольным*, потому что невозмущенная функция Грина $G_0(x, x')$ обращается в нуль при $x > x'$, то же относится ко всем порядкам борновского ряда и к его сумме. Кстати, из представления (4.1) тоже следует, что функция Йоста Ψ_k аналитична в верхней полуплоскости, потому что добавление положительной мнимой части k только улучшает сходимость интеграла.

Найдем уравнение, которому подчиняется ядро $K(x, y)$. Для этого подействуем на обе части уравнения (4.1) оператором Шредингера \hat{L} . Получится

$$-k^2\Psi_k = \hat{L}\Psi_k = \hat{L}e^{ikx} + \hat{L} \int_x^\infty K(x, y)e^{iky} dy. \quad (4.2)$$

Действие оператора на первое слагаемое выписывается сразу

$$\hat{L}e^{ikx} = -(U + k^2)e^{ikx}. \quad (4.3)$$

Во втором слагаемом сначала найдем вторую производную от интеграла

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \int_x^\infty K(x, y)e^{iky} dy &= \frac{d}{dx} \left[-K(x, y)|_{y=x}e^{ikx} + \int_x^\infty K_x(x, y)e^{iky} dy \right] \\ &= \underline{-ike^{ikx}K(x, x)} - e^{ikx} \frac{d}{dx}K(x, x) - e^{ikx} \frac{\partial}{\partial x}K(x, y)|_{y=x} + \int_x^\infty K_{xx}e^{iky} dy. \end{aligned} \quad (4.4)$$

.....

Произведение k^2 на второе слагаемое уравнения (4.2) преобразуем, интегрируя по частям

$$\begin{aligned} k^2 \int_x^\infty K(x, y)e^{iky} dy &= - \int_x^\infty K(x, y) \frac{d^2}{dy^2}e^{iky} dy \\ &= \int_x^\infty K_{yy}e^{iky} dy + \underline{ike^{ikx}K(x, x)} - e^{ikx} \frac{\partial}{\partial y}K(x, y)|_{y=x}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

.....

Слагаемые, подчеркнутые в (4.4) и (4.5) сплошной линией, взаимно уничтожаются, а подчеркнутые точками — объединяются. Подставляя (4.3), (4.4) и (4.5) в (4.2), получаем

$$\int_x^\infty (K_{xx} - K_{yy} + U(x)K) e^{iky} dy - 2e^{ikx} \frac{d}{dx}K(x, x) - e^{ikx}U(x) = 0.$$

Чтобы это условие выполнялось при любых k , необходимо, чтобы ядро K подчинялось гиперболическому уравнению

$$K_{xx} - K_{yy} - U(x)K = 0 \quad (4.6)$$

и условию на характеристике

$$U(x) = 2 \frac{d}{dx}K(x, x). \quad (4.7)$$

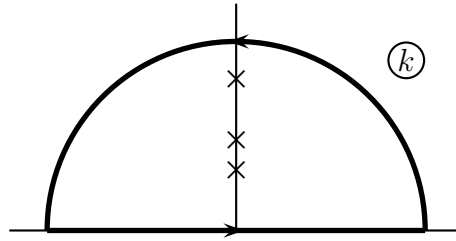


Рис. 4.1: Контур интегрирования (4.8) в плоскости комплексного переменного k . Крестиками показаны нули функции $a(k)$.

Уравнение (4.6) с условием (4.7) называется *задачей Гурса*. Можно показать, что задача Гурса имеет единственное решение, убывающее на бесконечности. Условие (4.7) позволило бы найти потенциал, если бы было известно ядро K . Данное свойство понадобится нам в следующем разделе, посвященном обратной задаче рассеяния.

4.2 Уравнение Гельфанда — Левитана — Марченко

Вернемся к разложению (3.5). Разделим обе части на коэффициент $a(k)$ и вычтем из них асимптотическое значение функции $\Psi_k^*(x)$ при $x \rightarrow +\infty e^{ikx}$. Теперь подставим вместо функций Йоста Ψ_k, Ψ_k^* из треугольные представления (4.1), умножим на e^{iky} и проинтегрируем по k по всей действительной оси

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Phi_k(x)}{a(k)} - e^{-ikx} \right] e^{iky} dk = \int_{-\infty}^{\infty} dk \int_x^{\infty} K(x, s) e^{ik(y-s)} ds + \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{ik(x+y)} dk + \int_x^{\infty} ds K(x, s) \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{ik(y+s)} dk. \quad (4.8)$$

При $y > x$ положительная мнимая часть k улучшает сходимость интеграла в левой части, значит можно замкнуть контур сверху (рис. 4.1).

Если связанные состояния отсутствуют, то интеграл в левой части равен нулю и из (4.8) мы получим интегральное уравнение

$$K(x, y) + F(x + y) + \int_x^{\infty} K(x, s) F(s + y) ds = 0. \quad (4.9)$$

Здесь функция

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{ikx} dk \quad (4.10)$$

является Фурье-образом комплексного коэффициента отражения. Линейное интегральное уравнение (4.9) называется уравнением *Гельфанда — Левитана — Марченко* [15, 16]. Неизвестная функция в этом уравнении $K(x, y)$, ядро треугольного представления, зависит от двух переменных.

Если же в спектре есть связанные состояния, то интеграл равен сумме вычетов в нулях функции $a(k)$, лежащих на положительной мнимой полуоси

$$2\pi i \sum_n \frac{\Phi_{i\kappa_n}(x)}{a'(i\kappa_n)} e^{-\kappa_n x}. \quad (4.11)$$

Тогда из интеграла Фурье (4.10) по непрерывному спектру в выражении для функции F добавится сумма вычетов (4.11)

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r(k) e^{ikx} dk + \sum_n M_n^2 e^{-\kappa_n x}, \quad (4.12)$$

где $M_n^2 = -iC_n/a'(i\kappa_n)$ — вычеты в точках дискретного спектра.

Упражнение 6. Пользуясь треугольным представлением (4.1), выведите формулу (4.12).

Замечание 4.1. Коэффициент разложения функции Йоста обладает при вещественном k следующим свойством симметрии: $a(k) = a^*(-k)$. Можно записать свойство в более общем виде, справедливом для комплексного k : $a(k) = a^*(-k^*)$. Из этого свойства следует, что функция $a(k)$ действительна на мнимой оси: $a(i\kappa) = a^*(i\kappa)$, а значит ее производная $a'(i\kappa)$ чисто мнимая. Тогда мнимая единица под знаком суммы в формуле (4.12) сокращается и коэффициент M_n^2 оказывается действительным.

Более того, можно показать, что коэффициент M_n^2 всегда положителен. Сравнимая определение коэффициентов C_n (3.10) и разложение (3.5) при $a(k) = 0$, мы видим, что $C_n = b(i\kappa_n)$. Теперь продифференцируем уравнение Шредингера (3.1) по k в точке $k = i\kappa_n$. Получится

$$\left(\hat{L} - \kappa_n^2\right) \frac{\partial \Phi_{i\kappa_n}}{\partial k} = 2i\kappa_n \Phi_{i\kappa_n}.$$

Умножим полученное уравнение на $\Phi_{i\kappa_n}$ и проинтегрируем по всем x , тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{i\kappa_n} \left(\hat{L} - \kappa_n^2\right) \frac{\partial \Phi_{i\kappa_n}}{\partial k} dx = 2i\kappa_n \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{i\kappa_n}^2(x) dx.$$

Интегрируя левую часть дважды по частям, убедимся, что подинтегральное выражение обратится в нуль, а внеинтегральный член равен главному члену асимптотики. Согласно формуле (3.8) главный член асимптотики $x \rightarrow +\infty$ равен $\partial \Phi_k / \partial k \rightarrow$

$a'(k)e^{-ikx}$. Отсюда

$$-\frac{ia'(i\kappa_n)b(i\kappa_n)}{2\kappa_n} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{i\kappa_n}^2(x) dx,$$

а значит величины $ib(i\kappa_n)$ и $a'(i\kappa_n)$ имеют разные знаки.

Таким образом, решение обратной задачи рассеяния, восстановления потенциала по данным рассеяния: коэффициенту отражения $r(k)$, вычетам M_n^2 и положениям дискретных уровней κ_n сводится к трем шагам:

1. Вычисление функции (4.12).
2. Решение линейного интегрального уравнения (4.9).
3. Восстановление потенциала по формуле (4.7).

4.3 Примеры

Рассмотрим два простых примера с непрерывным и дискретным спектром.

Пример 4.1. Найти потенциал, если дискретного спектра нет, а коэффициент отражения имеет только один полюс

$$r(k) = \frac{ib}{k + ib},$$

где b — положительный параметр. Сначала выполним преобразование Фурье (4.10)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ib}{k + ib} e^{ikx} \frac{dk}{2\pi} = b\Theta(-x)e^{bx}. \quad (4.13)$$

Контур интегрирования при $x > 0$ можно замкнуть в верхней полуплоскости, где нет полюсов и интеграл обращается в нуль. Если же $x < 0$ (см. рис. 4.2), то контур замыкается в нижней полуплоскости и интеграл равен вычету в точке $k = -ib$.

В уравнении (4.9) верхний предел интегрирования становится конечным из-за Θ -функции в ядре F :

$$K(x, y) = F(x + y) + \int_x^{-y} K(x, s)F(y + s) ds. \quad (4.14)$$

Надо рассмотреть два случая, которые отличаются знаком суммы $x + y$.

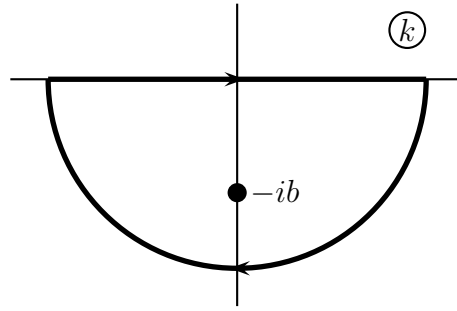


Рис. 4.2: Контур интегрирования (4.13) при $x < 0$.

Пусть $x+y > 0$, тогда $F(x+y) = 0$ в первом слагаемом, а также под интегралом ($x+y < y+s < 0$). В уравнении (4.14) остается только левая часть, следовательно $K = 0$. Пусть теперь $x+y < 0$, тогда $F(x+y) = be^{b(x+y)}$, интегральное уравнение

$$K(x, y) = be^{b(x+y)} + b \int_x^{-y} K(x, s)e^{b(s+y)} ds$$

сводится к алгебраическому и имеет постоянное решение $K = \text{const}$. Постоянную находим, вычисляя интеграл от экспоненты: $K = b$. Таким образом, $K(x, y) = b\Theta(x+y)$. В заключение, по формуле (4.7) восстанавливаем потенциал

$$U(x) = 2 \frac{d}{dx} K(x, x) = 2b\delta(x).$$

Полученный точечный потенциал согласуется с примером со стр. 19.

Пример 4.2. Найти *безотражательный* потенциал, в спектре которого имеется только один дискретный уровень $k = i\kappa$ и коэффициентом $M^2 = -iC/a(i\kappa)$. Коэффициент отражения для такого потенциала равен нулю $r(k) = 0$, тогда из (4.12) находим $F(x) = M^2 e^{-\kappa x}$.

Интегральное уравнение (4.9)

$$M^2 e^{-\kappa(x+y)} + K(x, y) + \int_x^\infty K(x, s)M^2 e^{-\kappa(s+y)} ds = 0 \tag{4.15}$$

можно решить с помощью разделения переменных. Тогда зависимость от y даётся экспонентой $K(x, y) = \psi_0(x)e^{-\kappa y}$, а зависимость от x уравнением (4.15):

$$\psi_0(x) = \frac{M^2 e^{-\kappa x}}{1 + \frac{M^2}{2\kappa} e^{-\kappa x}} = -\frac{\sqrt{2\kappa}M}{2 \operatorname{ch} \kappa(x-q)}, \quad q = \frac{1}{2\kappa} \ln \frac{M^2}{2\kappa}.$$

Теперь формула (4.7) позволяет восстановить потенциал

$$U(x) = -\frac{2\kappa^2}{\operatorname{ch}^2 \kappa(x-q)}.$$

Уравнение Шредингера с таким потенциалом имеет всего один связанный уровень $E = -\kappa^2$.

ЛЕКЦИЯ 5

О методе обратной задачи рассеяния

К середине 1960-х годов стало ясно, что подавляющее большинство нелинейных явлений приблизительно описывается всего несколькими нелинейными уравнениями. Приведем для примера три уравнения, которые часто встречаются в самых разных разделах физики:

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad (5.1)$$

$$\psi_t + \psi_{xx} + |\psi|^2\psi = 0, \quad (5.2)$$

$$u_{xt} - \sin u = 0. \quad (5.3)$$

Каждое из уравнений имеет свое название. Уравнение Кортевега — де Фриза (КдФ) (5.1) является моделью нелинейной среды со слабой нелинейностью и малой дисперсией и применяется в физике плазмы, в теории мелкой воды и даже для описания движения несжимаемой жидкости в гибких шлангах. Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) (5.2) описывает, в частности, распространение короткого светового импульса в волоконно-оптической линии связи. Уравнение *sin-Гордона* (СГ) (5.3) применяется в теории сверхпроводимости, в резонансной оптике, теории поля.

Многие из нелинейных уравнений были решены в 1970-х с помощью открытого тогда метода обратной задачи рассеяния - МОЗР (см. литературу, цитированную на стр. 18). Идея метода состоит в сведении нелинейной задачи к цепочке линейных. Оказалось, что целый ряд нелинейных уравнений имеет решения в виде уединенных волн (*солитонов*). Мы не будем здесь излагать общий метод, а только рассмотрим пример того, как нелинейное уравнение (5.1) возникает из линейного и опишем схематически, как КдФ сводится к линейным уравнениям.

5.1 Изоспектральное преобразование

Вернемся к уравнению Шредингера (3.1)

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - (\lambda - U(x)) \right] \psi = 0, \quad (5.4)$$

где $\lambda = k^2$ обозначает энергию. Для некоторых потенциалов мы знаем его точные решения, принадлежащее дискретному спектру. Например, для безотражательной ямы из примера 4.2 потенциал и волновая функция $U(x) = -2/\operatorname{ch}^2 x$, $\psi = 1/\operatorname{ch} x$ отвечают единственному связанному состоянию с энергией $\lambda = -1$. Другие примеры точно решаемых одномерных ям приведены в лекции 9 и в учебниках квантовой механики. Нельзя ли найти по данному точно решаемому потенциалу другие с тем же спектром? Иначе говоря, имеется ли преобразование, позволяющее из одного точно решаемого потенциала семейство других, сохраняющих спектр? Такое преобразование называется *изоспектральным*.

Самый простой пример такого преобразования — это сдвиг начала отсчета координаты: $U(x) \rightarrow U(x + a)$ или перенос неоднородности в другую точку. Преобразование трансляции можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial a} = 0,$$

где $u(x, a)$ — семейство потенциалов. Такое уравнение решается методом характеристик и его общее решение как раз произвольная функция от $x + a$. Существуют ли нетривиальные примеры?

5.2 Уравнение Лакса

Обозначим параметр преобразования буквой t и будем условно называть его временем. Обозначим семейство решений за $y(x, t)$, а оператор дифференцирования по координате буквой $\hat{D} = d/dx$. Тогда уравнение Шредингера (5.4) запишется как

$$\hat{L}y = \lambda y, \quad \hat{L} = \hat{D}^2 - u(x, t). \quad (5.5)$$

После дифференцирования уравнения (5.5) по времени получим

$$\hat{L}y + \hat{L}y_t = \lambda_t y + \lambda y_t, \quad (5.6)$$

Рассмотрим частный случай, когда зависимость y от времени дается линейным уравнением

$$y_t = \hat{B}y, \quad (5.7)$$

где \hat{B} — некоторый линейный дифференциальный оператор, подлежащий определению. Подставляя (5.7) в (5.6), найдем

$$\hat{L}\hat{B}y + \hat{L}_t y = \lambda_t y + \lambda \hat{B}y = \lambda_t y + \hat{B}\hat{L}y.$$

Чтобы собственное значение не зависело от параметра, положим $\lambda_t = 0$ и получим операторное уравнение

$$\hat{L}_t = [\hat{B}, \hat{L}], \quad (5.8)$$

так называемое уравнением *Лакса*. Теперь мы будем искать частные решения уравнения (5.8), соответствующее КдФ.

5.3 Оператор \hat{B}

Первый порядок

Пусть $\hat{B} = a\hat{D}$, где $a = \text{const}$. Найдем сначала коммутатор $[\hat{B}, \hat{L}] = -au_x$, тогда из операторного уравнения (5.8) получим уравнение в частных производных

$$u_t - au_x = 0.$$

Здесь мы воспользовались тождеством $\hat{L}_t = -u_t$. Решением уравнения первого порядка, как известно, служит произвольная функция от $x + at$, то есть потенциал переносится вдоль оси x со скоростью a . Все снова свелось к простой трансляции. То же самое уравнение получается для оператора второго порядка. Нетривиальная зависимость появляется в третьем порядке.

Третий порядок

Пусть $\hat{B} = a\hat{D}^3 + f\hat{D} + g$, где $a = \text{const}$, f, g — функции координаты. Сначала вычисляем коммутатор

$$\begin{aligned} [\hat{B}, \hat{L}] &= [a\hat{D}^3 + f\hat{D} + g, \hat{D}^2 - u] = -a[\hat{D}^3, u] - [f\hat{D}, u] + [f\hat{D}, \hat{D}^2] + [g, \hat{D}^2] = \\ &= -\left(au_{xxx} + 3au_{xx}\hat{D} + 3u_x\hat{D}^2 + fu_x + f'\hat{D} + 2f'\hat{D}^2 + g'' + 2g'\hat{D} \right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Чтобы найти простое частное решение, приравняем к нулю коэффициенты при операторах \hat{D}, \hat{D}^2 . Получится пара уравнений

$$3au_{xx} + f'' + 2g' = 0, \quad 3au_x + 2f' = 0.$$

Из второго уравнения пары видно, что $f = c_1 - 3au/2$. Подставляя в первое уравнение, найдем $g = c_2 - 3au_x/4$, где c_1, c_2 — константы интегрирования. Тогда из (5.9) получим

$$u_t + g'' + fu_x + au_{xxx} = 0$$

или

$$u_t - \frac{3a}{4}u_{xxx} + \left(c_1 - \frac{3a}{2}u \right) u_x + au_{xxx} = 0.$$

Отсюда при $a = -4, c_1 = 0$ следует уравнение Кортевега — де Фриза (5.1).

Таким образом, уравнение (5.1) оставляет спектр оператора \hat{L} неизменным. При этом эволюция решения уравнения Шредингера при изменении параметра подчиняется линейному уравнению (5.7)

$$y_t = \left(-4\hat{D}^3 + 5u\hat{D} + 3u_x \right) y. \quad (5.10)$$

Напомним, что изменение функции $y(x, t)$ по координате также описывается линейным уравнением (5.5).

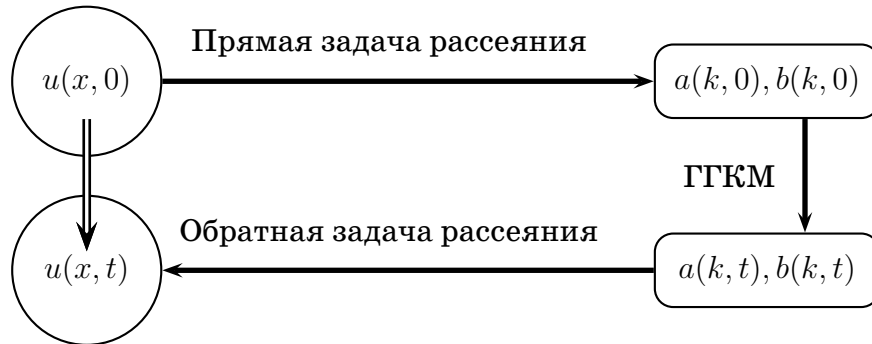


Рис. 5.1: Схема решения нелинейного уравнения методом обратной задачи рассеяния.

5.4 Метод обратной задачи рассеяния

Особенно просто уравнение (5.10) выглядит в пределах $x \rightarrow \pm\infty$, где можно пренебречь вторым и третьим слагаемыми в правой части, если потенциал быстро убывает:

$$y_t = -4\hat{D}y. \tag{5.11}$$

Рассмотрим решение вида $y = h(k, t)\Phi_k(x)$, где $\Phi_k(x)$ — левая функция Йоста, нормированная согласно (3.4). При $x \rightarrow -\infty$ из (1) можно получить уравнение на вспомогательную функцию $h(k, t)$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -4ik^3h, \tag{5.12}$$

значит $h(k, t) = h(k, 0)e^{-4ik^3t}$.

Теперь перейдем к пределу $x \rightarrow +\infty$, где левая функция Йоста дается формулой (3.8). Подставляя эту зависимость в (5.11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, найдем уравнения

$$\dot{a} = 0, \quad \dot{b} = -8ik^3b. \tag{5.13}$$

Система уравнений описывает зависимость данных рассеяния от параметра t и называется уравнениями *Гарднера—Грина—Крускала—Миуры* (ГГКМ). Заметим, что уравнения ГГКМ линейные и легко решаются.

Схематически решение задачи Коши для нелинейного эволюционного уравнения показано на рис. 5.1. Известно решение в начальный момент $u(x, 0)$. Требуется найти решение в момент времени t . Вместо того, чтобы сразу двинуться вниз по двойной стрелке, будем идти в обход, как показано одинарными стрелками. Сначала решаем линейную прямую задачу рассеяния для оператора \hat{L} . В случае КдФ задача ставится для уравнения Шредингера с потенциалом $u(x, 0)$. Затем решаем линейную задачу эволюции данных рассеяния. В нашем случае надо решить линейные уравнения ГГКМ, потому что преобразование изоспектральное и $k = \text{const}$. На следующем шаге надо решить обратную задачу рассеяния: по данным рассеяния $a(k, t), b(r, t)$ восстановить потенциал $u(x, t)$. В нашем

случае надо решить линейное интегральное уравнение ГЛМ. На выходе получаем как раз решение задачи Коши $u(x, t)$. На обходном пути нам приходится решить три задачи, но все они линейные.

Достоинства МОЗР

1. Задача Коши для нелинейного уравнения сводится к трем линейным задачам.
2. Операторы \hat{L}, \hat{B} уже найдены не только для КдФ, но и для других важных уравнений нелинейной физики.

Недостатки МОЗР

1. Как известно, линейные задачи тоже не всегда решаются аналитически. Поэтому сведение к линейной задаче не означает автоматически, что найдено решение.
2. В основном, МОЗР позволяет решать одномерные задачи. Для двумерных задач операторы \hat{L}, \hat{B} удается найти в редких случаях.

Тем не менее, открытие МОЗР можно заслуженно считать одним из главных достижений математической физики второй половины XX века. Даже в тех случаях, когда линейные задачи не имеют явного решения, можно доказать общие свойства решений, пользуясь линейностью. В частности, для КдФ показано, что любое начальное условие распадается на фон, соответствующий непрерывному спектру оператора \hat{L} , и уединенные волны (солитоны), которым отвечают дискретные уровни. Простейшие примеры солитонных решений мы рассмотрим на следующей лекции.

ЛЕКЦИЯ 6

СОЛИТОНЫ

Чтобы понять, что такое солитон, мы не будем пользоваться сложным методом обратной задачи рассеяния, а применим тоже достаточно громоздкий, но более простой подход Баргмана. В 1949 году Баргман предложил решать уравнение Шредингера наоборот. Вместо сложной задачи нахождения волновой функции по заданному потенциалу подставим решение заданного вида и найдем тот потенциал, в котором это решение реализуется.

Будем искать решение уравнения Шредингера (5.5) в виде

$$y = e^{ikx} F(x, k),$$

где $F(x, k)$ — полином от k с коэффициентами, зависящими от x . Найдем потенциал u , при котором уравнение имеет заданное решение. Такой потенциал называется *потенциалом Баргмана*.

6.1 Линейный потенциал Баргмана

Рассмотрим частный случай линейной функции

$$F(x, k) = 2k + ia(x).$$

Подставляя в уравнение (5.5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях k , получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$a' + u = 0, \quad a'' - ua = 0. \quad (6.1)$$

Исключим u , пользуясь первым из уравнений. Получится нелинейное уравнение, которое можно один раз проинтегрировать. Получится $a' + a^2/2 = 2\mu^2$, где $2\mu^2$ — константа интегрирования. Замена неизвестной функции $a = 2w'/w$ повышает порядок, но сводит уравнение к линейному с постоянными коэффициентами

$$w'' - \mu^2 w = 0.$$

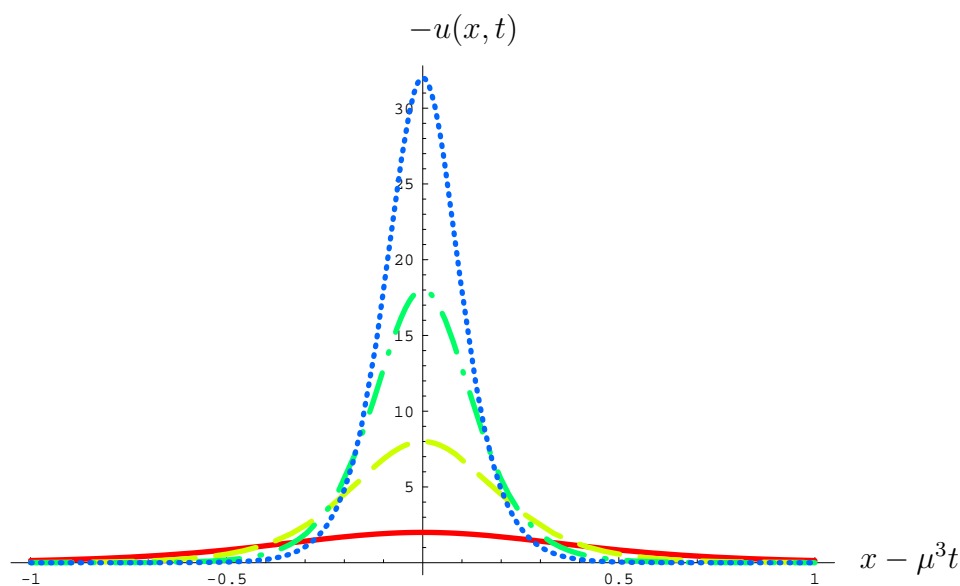


Рис. 6.1: Односолитонное решение при различных значениях параметра $\mu = 1, 2, 3, 4$ (снизу вверх).

Общее решение дается гиперболическим косинусом

$$w = \alpha \operatorname{ch}(\mu x - \varphi),$$

где α, φ — константы интегрирования. Из первого уравнения (6.1) получаем потенциал

$$u = -2(\ln w)''.$$

Чтобы $u(x, t)$ было решением уравнения Кортевега - де Фриза $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$, начальная фаза φ должна быть функцией времени и удовлетворять уравнению

$$\dot{\varphi} = 2\mu^3.$$

Полученное решение

$$u = -\frac{2\mu^2}{\operatorname{ch}^2(\mu x - 4\mu^3 t)} \quad (6.2)$$

называется *простым солитоном*. Его амплитуда, характерная ширина и скорость задаются одним параметром μ . На рис. 6.1 изображено односолитонное решение (6.2) в сопутствующей системе отсчета при разных значениях «силы» солитона μ . Самый сильный солитон при $\mu = 4$ является еще и самым узким. Более того, сильный солитон и движется быстрее: скорость солитона равна $4\mu^3$.

Упражнение 7. Найдите нормировку солитона

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{u} \, dx$$

и убедитесь, что она сохраняется.

6.2 Квадратичный потенциал Баргмана

Теперь потенциал Баргмана, соответствующий квадратичной функции

$$F(x, k) = 4k^2 + 2ika(x) + b(x).$$

Снова подставляем $y = e^{ikx}F$ в уравнение Шредингера (5.5) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях k . Получится система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a' + u = 0, \quad (6.3)$$

$$b' + a'' - ua = 0, \quad (6.4)$$

$$b'' - ub = 0. \quad (6.5)$$

Подставляя u из (6.3) в (6.4), получим уравнение $b' + a'' + aa' = 0$, которое можно проинтегрировать

$$b + a' + \frac{a^2}{2} = 2c_1, \quad (6.6)$$

где c_1 — константа интегрирования. Умножая уравнение (6.4) на b , уравнение (6.5) на a и вычитая их друг из друга, найдем уравнение $bb' + ba'' - ab'' = 0$, которое тоже интегрируется

$$\frac{b^2}{2} + ba' - ab' = 2c_2, \quad (6.7)$$

где c_2 — вторая константа интегрирования.

Будем искать решение в виде

$$a = 2\frac{w'}{w}, \quad (6.8)$$

где w — новая неизвестная функция. Из (6.6) найдем b :

$$b = 2c_1 - 2\frac{w''}{w}. \quad (6.9)$$

Подставляем (6.8) и (6.9) в (6.7), раскрываем скобки и приводим подобные

$$2c_1^2 - 4c_1\frac{w''}{w} + 2\frac{w''^2}{w^2} + 4c_1\left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2}\right) - 4\frac{w''}{w}\left(\frac{w''}{w} - \frac{w'^2}{w^2}\right) + 4\frac{w'}{w}\left(\frac{w'''}{w} - \frac{w'w''}{w^2}\right) = 2c_2.$$

Зачеркнутые слагаемые взаимно уничтожатся. Умножая на w^2 получим все еще нелинейное уравнение

$$2w'w''' - w''^2 - 2c_1w'^2 + (c_1^2 - c_2)w^2 = 0. \quad (6.10)$$

Остается еще раз продифференцировать это уравнение и сократить на $w' \neq 0$ и получится линейное уравнение четвертого порядка

$$w^{IV} - 2c_1w'' + (c_1^2 - 2c_2)w = 0. \quad (6.11)$$

Общее решение уравнения (6.11) дается линейной комбинацией четырех экспонент $e^{\lambda x}$. Подставляя экспоненту в (6.11), получим биквадратное уравнение

$$\lambda^4 - 2c_1\lambda^2 + c_1^2 - c_2 = 0.$$

Значит решения даются произвольной линейной комбинацией экспонент $e^{\pm\mu x}$, $e^{\pm\nu x}$, где $\mu = \sqrt{c_1 + \sqrt{c_2}}$, $\nu = \sqrt{c_1 - \sqrt{c_2}}$.

Однако не всякая линейная комбинация является решением нелинейного уравнения (6.10). Подставляя решение в виде комбинации гиперболических косинусов, убеждаемся, что (6.10) можно удовлетворить только при определенном отношении коэффициентов $w_0 = \nu \operatorname{ch} \mu x + \mu \operatorname{ch} \nu x$. Заметим, что решение w_0 можно взять с любым множителем, так как все слагаемые (6.10) имеют вторую степень по w . Более того, уравнение (6.10) не содержит явно координаты, поэтому точки начала отсчета в аргументах можно сдвигать. В итоге выбираем

$$w(x) = 2\nu \operatorname{ch}(\mu x - \alpha) + 2\mu \operatorname{ch}(\nu x - \beta),$$

где фазы α, β представляют собой константы интегрирования. Теперь из (6.8) и (6.3) можно найти потенциал

$$u = -\frac{(\mu_+^2 - \mu_-^2)(\mu_+^2 - \mu_-^2 + \mu_+^2 \operatorname{ch}(\mu_- x - \alpha_-) + \mu_-^2 \operatorname{ch}(\mu_+ x - \alpha_+))}{[\nu \operatorname{ch}(\mu x - \alpha) + \mu \operatorname{ch}(\nu x - \beta)]^2},$$

где $\alpha_{\pm} = \alpha \pm \beta$, $\mu_{\pm} = \mu \pm \nu$.

6.3 Двухсолитонный пример

Вместо подстановки полученного громоздкого выражения в (5.1) мы рассмотрим численный пример $\mu = 3, \nu = 1, \alpha = 28t, \beta = 36t$. В этом частном случае

$$u = -\frac{12(3 + \operatorname{ch}(64t - 4x) + 4 \operatorname{ch}(8t - 2x))}{[\operatorname{ch}(36t - 3x) + 3 \operatorname{ch}(28t - x)]^2}. \quad (6.12)$$

При $t = 0$ получается $u(x, 0) = -6/\operatorname{ch}^2 x$. Можно также получить из (6.12) асимптотические формулы

$$u = \begin{cases} -\frac{8}{\operatorname{ch}^2(\eta \pm \Delta)}, & \eta^2 \ll 1, \xi \rightarrow \pm\infty, \\ -\frac{4}{\operatorname{ch}^2(\xi \pm \Delta)}, & \xi^2 \ll 1, \eta \rightarrow \pm\infty, \end{cases} \quad (6.13)$$

где $\xi = 2x - 32t, \eta = x - 4t, \Delta = \operatorname{arth}(1/2)$. Из асимптотики видно, что до взаимодействия имеется два солитона с амплитудами 8 и 4.

На рис. 6.2 показано, как происходит взаимодействие солитонов. Солитон с большей амплитудой движется быстрее и догоняет более слабый солитон (первый ряд графиков). Затем они перекрываются и начинают взаимодействовать

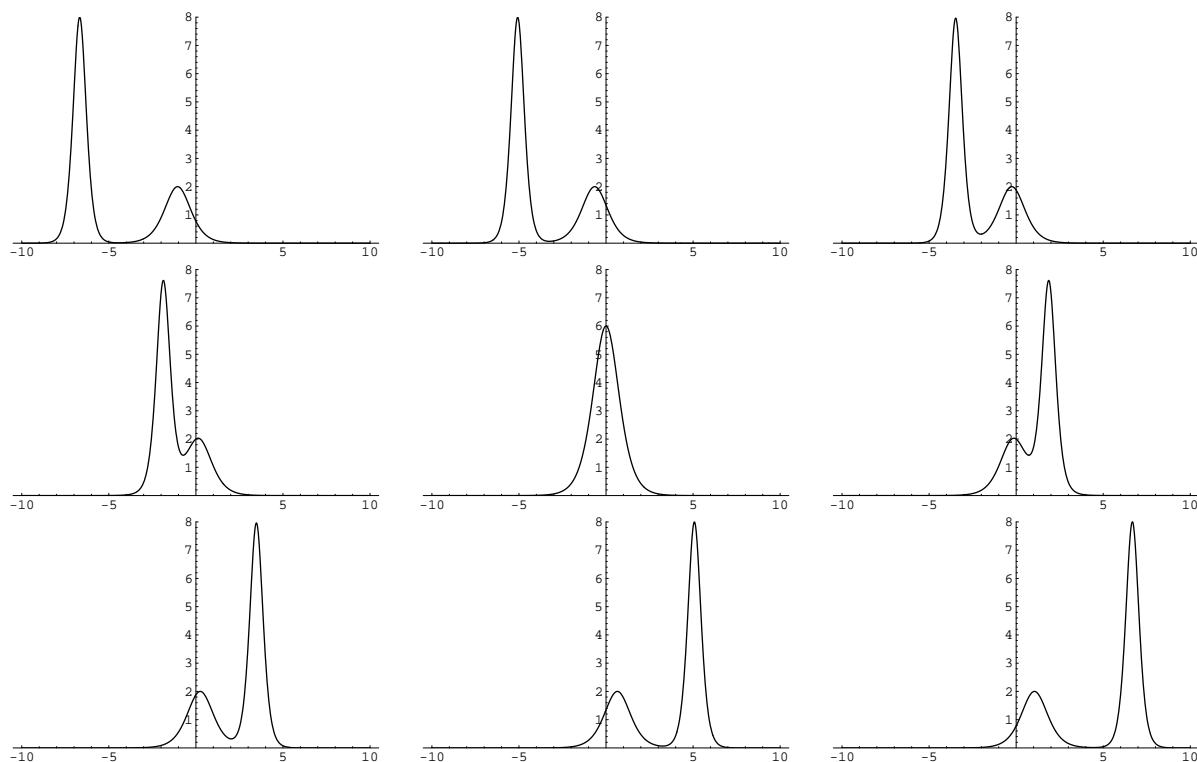


Рис. 6.2: Распространение двух солитонов $-u(x, t)$ (6.12) при $-0.4 \leq t \leq 0.4$ с шагом $\Delta t = 0.1$ (слева направо и сверху вниз).

(второй ряд графиков). Солитоны сливаются при $t = 0$ (средний график второго ряда). В этот момент их нелинейное взаимодействие самое сильное. Это видно хотя бы из амплитуды, равной 6, что вдвое меньше суммы амплитуд независимых солитонов. Далее более сильный солитон обгоняет слабый и они снова движутся, практически не взаимодействуя (третий ряд графиков). Единственное, что меняется после взаимодействия — это фазы солитонов. Как видно из формул (6.13), фаза меняется с $-\Delta$ до $+\Delta$.

Это свойство не менять форму после взаимодействия и послужило определением солитонов.

ЛЕКЦИЯ 7

Теорема Таланова

Двумерное нелинейное уравнение Шредингера

$$i\psi_t + \Delta\psi + |\psi|^2\psi = 0 \quad (7.1)$$

описывает многие нелинейные явления, в частности, распространение света в нелинейной оптике. В этом случае комплексная амплитуда электрического поля $\psi(\mathbf{r}, t)$ зависит от поперечных координат в световом пучке. Время t в стационарной задаче понимают как продольную координату z , а оператор Лапласа описывает дифракционную расходимость пучка, а последнее слагаемое — нелинейную линзу. Показатель преломления среды $n = n_0 + n_2|E|^2$ зависит от интенсивности света. В центральной области светового пучка интенсивность выше, а значит выше и показатель преломления. Значит среда ведет себя как собирающая линза.

Пока свет слабый, эффекты дифракции сильнее нелинейной линзы. Но при распространении мощного лазерного пучка фокусировка может стать сильнее дефокусировки и можно ожидать, что пучок схлопнется в поперечном направлении, бесконечно сфокусируется. В эксперименте *самофокусировка* проявляется в виде тонких светящихся нитей. Разумеется, радиус пучка не станет равным нулю, потому что раньше нарушится применимость уравнения (7.1). Приведенное качественное объяснение не отменяет строгого математического исследования уравнения Шредингера, которое мы здесь приведем. Центральной здесь является теорема Таланова о самофокусировке. Кратко теорема изложена в сборнике задач [9], а здесь мы приведем подробности вычислений.

7.1 Интегралы движения

Уравнение (7.1) имеет бесконечное количество интегралов движения. Здесь мы докажем сохранение только двух величин: числа частиц и гамильтониана.

Число частиц

Докажем сохранение следующей величины

$$N = \int |\psi|^2 dr. \quad (7.2)$$

В квантовой механике это бы была сохраняющаяся нормировка волновой функции, поэтому N называют полным числом частиц.

Выпишем комплексно сопряженное уравнение Шредингера

$$-i\psi_t^* + \Delta\psi^* + |\psi|^2\psi^* = 0. \quad (7.3)$$

Умножим (7.1) на ψ^* , (7.3) на ψ и вычтем одно из другого. Нелинейный член сократится и останется квантовомеханическое уравнение непрерывности

$$\frac{\partial|\psi|^2}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = -i(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*). \quad (7.4)$$

Теперь проинтегрируем (7.4) по всем координатам

$$\frac{\partial N}{\partial t} = - \int \operatorname{div} \mathbf{j} dr = - \oint \mathbf{j} dl = 0.$$

По теореме Гаусса интеграл в правой части преобразуется в поток через бесконечно удаленный замкнутый контур и исчезает, если ток \mathbf{j} достаточно быстро убывает.

Гамильтониан

Докажем сохранение

$$H = \int \left(|\nabla\psi|^2 - \frac{1}{2}|\psi|^4 \right) dr. \quad (7.5)$$

Поддействуем на уравнение (7.1) оператором градиента, умножим на $\nabla\psi^*$ и вычтем из получившегося уравнения комплексно сопряженное. Получится

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\nabla\psi|^2 + (\nabla\psi^*\nabla\Delta\psi - \nabla\psi\nabla\Delta\psi^*) + [\nabla\psi^*\nabla(|\psi|^2\psi) - \nabla\psi\nabla(|\psi|^2\psi^*)] = 0.$$

Теперь проинтегрируем по всему двумерному пространству. В круглой скобке зачеркнутые члены сократятся при интегрировании по частям, а квадратная скобка упростится

$$i\frac{\partial}{\partial t} \int |\nabla\psi|^2 dr - \int |\psi|^2 (\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi) dr = 0. \quad (7.6)$$

Теперь умножим уравнение (7.1) на $|\psi|^2\psi^*$, вычтем комплексно сопряженное и проинтегрируем по dr . Нелинейные члены сократятся, останется

$$i\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \int |\psi|^4 dr - \int |\psi|^2 (\psi \Delta \psi^* - \psi^* \Delta \psi) dr = 0. \quad (7.7)$$

Остается вычесть (7.7) из (7.6), получится $dH/dt = 0$.

Уравнения Гамильтона

Величина H имеет смысл гамильтониана системы. Действительно, если проварьировать (7.5), считая вариации $\delta\psi$ и $\delta\psi^*$ независимыми, получим

$$\delta H = - \int [(\Delta\psi + |\psi|^2\psi) \delta\psi^* + (\Delta\psi^* + |\psi|^2\psi^*) \delta\psi] dr.$$

Теперь можно найти вариационную производную по $\delta\psi^*$ при $\delta\psi = 0$ и убедиться, что уравнение Шредингера запишется в виде

$$i \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta\psi^*}. \quad (7.8)$$

Полученное уравнение является обобщением уравнений Гамильтона из классической механики на бесконечное число степеней свободы. Это наглядно видно из следующего примера.

Пример 7.1. Чтобы понять, как записывается в комплексном виде уравнения Гамильтона в механике, выпишем действительные уравнения Гамильтона для одной степени свободы

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

где p, q — координата и импульс. Перейдем к комплексной переменной $a = (q + ip)/\sqrt{2}$. Преобразуем уравнение для a :

$$\dot{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial H}{\partial p} - i \frac{\partial H}{\partial q} \right) = -i \frac{\partial H}{\partial a^*}.$$

Последнее, что осталось сделать, умножить последнее уравнение на i , получится

$$i\dot{a} = \frac{\partial H}{\partial a^*}. \quad (7.9)$$

Уравнение (7.9) обобщается на случай конечного числа степеней свободы введением индекса у величин a . Для бесконечного числа координат индекс перейдет в зависимость от координат \mathbf{r} , полная производная по времени заменится на частную, а частная производная по a^* станет вариационной производной функционала H .

Смысл комплексной переменной a в классической механике — это комплексная координата частицы на фазовой плоскости (q, p) . В квантовой механике a, a^* переходят в операторы рождения и уничтожения.

Упражнение 8. Запишите в комплексных переменных функцию Гамильтона одномерного классического осциллятора и сравните с квантовомеханическим оператором Гамильтона, записанным через операторы рождения и уничтожения.

7.2 Уравнение движения

Введем новый функционал

$$I = \int r^2 |\psi|^2 dr. \quad (7.10)$$

Если нормировать его на число частиц, то I/N представляет собой средний квадрат радиуса светового пучка. Усреднение производится по распределению интенсивности света. Если у нас получится, что $I \rightarrow 0$, это будет свидетельствовать о самофокусировке.

Подействуем на уравнение (7.10) оператором id/dt и воспользуемся уравнениями (7.1), (7.3)

$$i \frac{dI}{dt} = - \int r^2 (\psi^* \Delta \psi + |\psi|^4 - \psi \Delta \psi^* - |\psi|^4) dr.$$

Интегрируя по частям, найдем

$$i \frac{dI}{dt} = -2 \int (\psi(\mathbf{r}\nabla)\psi^* - \psi^*(\mathbf{r}\nabla)\psi) dr. \quad (7.11)$$

Снова подействуем на (7.11) id/dt и получим уравнение движения для величины I

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 I}{dt^2} &= 2i \frac{d}{dt} \int \psi^*(\mathbf{r}\nabla)\psi dr + \text{c.c.} = \\ &= 2 \int [(\Delta\psi^* + |\psi|^2\psi^*)(\mathbf{r}\nabla)\psi - \psi^*(\mathbf{r}\nabla)(\Delta\psi + |\psi|^2\psi) + \text{c.c.}] dr, \end{aligned}$$

где с.с. означает комплексно сопряженное слагаемое. В последнем подынтегральном выражении есть квадратичные по ψ слагаемые и члены, содержащие ψ или ψ^* в четвертой степени. Начнем упрощение с четвертой степени

$$|\psi|^2\psi^*(\mathbf{r}\nabla)\psi - \psi^*(\mathbf{r}\nabla)|\psi|^2\psi = -|\psi|^2(\mathbf{r}\nabla)|\psi|^2.$$

Квадратичные слагаемые упростим, пользуясь тождеством из векторного анализа: $(\mathbf{r}\nabla)\Delta = \Delta(\mathbf{r}\nabla) - 2\Delta$:

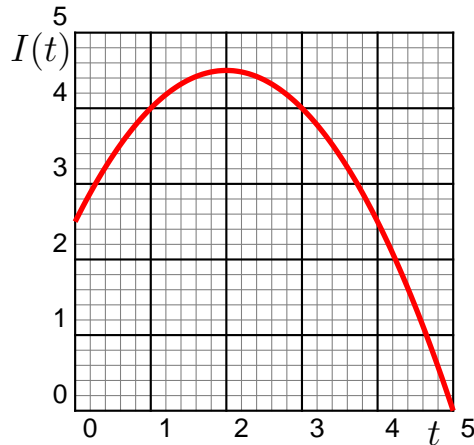
$$(\Delta\psi^*)(\mathbf{r}\nabla)\psi - \psi^*(\mathbf{r}\nabla)\Delta\psi = (\Delta\psi^*)(\mathbf{r}\nabla)\psi - \psi^*\Delta(\mathbf{r}\nabla)\psi + 2\psi^*\Delta\psi.$$

После интегрирования по частям первые два слагаемых в правой части исчезают, а последнее перейдет в $-2 \int |\nabla\psi|^2 dr$. Собирая все вместе, получим

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 2 \int [2|\nabla\psi|^2 + |\psi|^2(\mathbf{r}\nabla)|\psi|^2] dr.$$

Остается взять по частям интеграл от слагаемых четвертой степени, пользуясь тем, что в двумерном случае $\text{div } \mathbf{r} = 2$, и сравнить с формулой (7.5). Окончательно получим уравнение движения

$$\frac{d^2 I}{dt^2} = 8H. \quad (7.12)$$

Рис. 7.1: Пример графика $I(t)$ при $H < 0$.

7.3 Теорема Таланова

Поскольку гамильтониан сохраняется, уравнение (7.12) решается сразу

$$I(t) = A + Bt + 4Ht^2, \quad (7.13)$$

где A, B — константы интегрирования. При $H < 0$ возникает противоречие. Величина $I(t)$ пропорциональна среднему квадрату радиуса, поэтому положительно определена по построению. Вместе с тем выражение (7.13) в некоторый момент времени становится отрицательным, рис. 7.1. В этом состоит утверждение теоремы Таланова.

Единственный выход из противоречия состоит в том, что в некоторый момент времени решение теряет непрерывность. Такое поведение — возникновение особенности решения за конечное время — называется *коллапсом*. Самый известный пример коллапса — опрокидывание решения уравнения Хопфа $u_t + uu_x = 0$, которое наступает, когда в начальном условии есть область с отрицательной производной $u_x < 0$. В этом примере за конечное время становится бесконечной производная решения.

Обращение в нуль функции $I(t)$ означает, что в некоторый момент времени все распределение $|\psi(\mathbf{r})|^2$ становится сосредоточенным на оси. Значение $|\psi(0)|^2$ при этом становится бесконечным, потому что сохраняется величина N — нормировка функции ψ . Значит в уравнении Шредингера в бесконечность обращается само решение.

ЛЕКЦИЯ 8

Функция Грина как T-экспонента

8.1 Операторный метод

Для начала рассмотрим самый простой пример линейного уравнения первого порядка

$$u_t + u_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x). \quad (8.1)$$

Запишем решение в виде действия операторной экспоненты на начальное условие

$$u(x, t) = e^{-t \frac{d}{dx}} f(x). \quad (8.2)$$

Согласно определению, под экспонентой от оператора надо понимать ряд

$$e^{-t \frac{d}{dx}} = 1 - \frac{t}{1!} \frac{d}{dx} + \frac{t^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} - \dots$$

Действие ряда на начальную функцию дается рядом Тейлора, который легко свернуть

$$u(x, t) = f(x) - \frac{t}{1!} \frac{df}{dx} + \frac{t^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} - \dots = f(x - t).$$

Получилось известное решение в виде бегущей волны, которое можно было найти и методом характеристик.

Диагонализация оператора эволюции

Рассмотрим одномерное уравнение теплопроводности на бесконечном интервале $-\infty < x < \infty$ с начальным условием

$$u_t = u_{xx}, \quad u(x, 0) = f(x). \quad (8.3)$$

Формальное операторное решение дается рядом

$$u(x, t) = e^{t \frac{d^2}{dx^2}} f(x), \quad (8.4)$$

однако этот ряд так же просто не сворачивается.

В силу линейности решение уравнения (8.3) можно записать в виде интеграла

$$u(x, t) = \int G(x, x', t) f(x') dx',$$

где функция Грина $G(x, x', t) = G(x - x', t)$ зависит только от разности аргументов, поскольку мы решаем уравнение с постоянными коэффициентами.

Вычислить экспоненту от оператора проще всего, когда оператор диагональный. Как и в конечномерном пространстве, чтобы диагонализировать оператор, надо перейти в представление с базисом из его собственных функций

$$\frac{d^2}{dx^2} e^{ikx} = -k^2 e^{ikx},$$

то есть выполнить преобразование Фурье

$$G(x, t) = \int G_k(t) e^{ikx} \frac{dk}{2\pi}, \quad G_k(t) = \int G(x, t) e^{-ikx} dx.$$

В k -представлении во всех слагаемых разложения, а значит и в показателе экспоненты оператор заменится собственным значением $-k^2$. Обратное преобразование Фурье дает функцию Грина

$$G(x, t) = \int e^{ikx - k^2 t} \frac{dk}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right). \quad (8.5)$$

Из ответа видно, что время вошло в знаменателе показателя экспоненты. Значит зависимость неаналитическая, поэтому ряд и не удавалось свести к ряду Тейлора.

Хронологический оператор

Рассмотрим более общее уравнение теплопроводности с коэффициентом, зависящим от координаты и времени $a = a(x, t)$

$$G_t = \hat{L}G, \quad \hat{L} = a \frac{d^2}{dx^2}, \quad G(x, x', 0) = \delta(x - x'). \quad (8.6)$$

Его решение уже нельзя записать просто в виде экспоненты 8.4. Поскольку коэффициент зависит от времени надо написать интеграл, а раз операторы, взятые в разные моменты времени не коммутируют, надо явно указать порядок

$$\hat{G} = \hat{T} \exp \left[\int_0^T \hat{L}(t) dt \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{\varepsilon \hat{L}(T)} e^{\varepsilon \hat{L}(T-\varepsilon)} \dots e^{\varepsilon \hat{L}(\varepsilon)}, \quad (8.7)$$

где отрезок времени T разделен на $(N + 1)$ частей длины $\varepsilon = T/(N + 1)$. В определенном таким способом операторе порядок действия операторов \hat{L} определен.

Сначала на функцию будет действовать оператор в момент времени $t = \varepsilon$, затем $t = 2\varepsilon, \dots$, а последним подействует оператор в момент времени T . Определенная таким образом функция называется T -экспонентой, а оператор \hat{T} перед экспонентой — *хронологическим* оператором или оператором Дайсона.

8.2 Фейнмановский интеграл

Проложим экспоненты под знаком предела (8.7) дельта-функциям и и проинтегрируем по всем промежуточным координатам, считая начальную и конечную координаты заданными

$$x(0) = x', \quad x(T) = x. \quad (8.8)$$

Получим приближенное значение функции Грина в виде N -кратного интеграла

$$G_\varepsilon(x, x', T) = \int dx_1 dx_2 \dots dx_N \delta(x - x_1) e^{\varepsilon L_1} \delta(x_1 - x_2) e^{\varepsilon L_2} \dots \delta(x_{N-1} - x_N) e^{\varepsilon L_N}, \quad (8.9)$$

где $x_l = x(T - l\varepsilon)$ — промежуточные точки траектории, $x_0 = x', x_{N+1} = x$, $L_l = \hat{L}(T - l\varepsilon)$, $l = 1, \dots, N$. Функцию Грина можно найти как предел выражения (8.9) при $\varepsilon \rightarrow 0$.

На следующем этапе запишем каждую дельта-функцию в виде интегрального представления

$$\delta(x_{l-1} - x_l) = \int e^{ik(x_{l-1} - x_l)} \frac{dk}{2\pi}.$$

Тогда из (8.9) получится $2N$ -кратный интеграл

$$G_\varepsilon = \int dx_1 dx_2 \dots dx_N \frac{dk_1}{2\pi} \frac{dk_2}{2\pi} \dots \frac{dk_N}{2\pi} e^{ik_1(x - x_1)} e^{\varepsilon L_1} \dots e^{ik_N(x_{N-1} - x_N)} e^{\varepsilon L_N}. \quad (8.10)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ можно заменить каждую экспоненту от оператора L_l на ее два первых члена разложения

$$e^{\varepsilon L_l} \approx 1 + \varepsilon L_l$$

и подействовать оператором L_l на соответствующую координату

$$L_l e^{ik_l(x_{l-1} - x_l)} = -ak_l^2 e^{ik_l(x_{l-1} - x_l)}.$$

Затем мы снова «поднимем» эти выражения в показатели экспонент

$$G_\varepsilon = \int dx_1 dx_2 \dots dx_N \frac{dk_1}{2\pi} \frac{dk_2}{2\pi} \dots \frac{dk_N}{2\pi} e^{ik_1(x - x_1)} e^{-\varepsilon a_1 k_1^2} \dots e^{ik_N(x_{N-1} - x_N)} e^{-\varepsilon a_N k_N^2}.$$

Ценой усложнения интеграла мы добились исчезновения операторов. Теперь порядок экспонент не важен и под интегралом стоит произведение чисел.

Интеграл по всем $k_l, l = 1, \dots, N$ оказывается гауссовым и вычисляется по формуле

$$\int dx \exp \left[-\frac{1}{2}(x, Ax) + i(\kappa, x) \right] = \frac{(2\pi)^{N/2}}{(\det A)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2}(\kappa, A^{-1}\kappa) \right], \quad (8.11)$$

где $x = (x_1, \dots, x_N)$ и $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_N)$ — N -мерные действительные векторы, A симметричная матрица, а круглые скобки означают скалярное произведение.

Упражнение 9. Вывести формулу (8.11).

Остается N -кратный интеграл по переменным x_l

$$G_\varepsilon = \int \frac{dx_1 dx_2 \dots dx_N}{(2\pi)^{N/2}} \exp \left[-\frac{(x - x_1)^2}{4\varepsilon a_1} - \frac{(x_1 - x_2)^2}{4\varepsilon a_2} \dots - \frac{(x_{N-1} - x_N)^2}{4\varepsilon a_N} \right].$$

При $a = \text{const}$ интеграл тоже гауссов и может быть найден по формуле (8.11), но мы не будем его вычислять, а запишем предел в другом виде

$$G(x, x', t) = \int \mathcal{D}x(t) e^{-S}, \quad S = \frac{1}{4} \int_0^T \frac{\dot{x}^2}{2a} dt. \quad (8.12)$$

Здесь

$$\mathcal{D}x(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} dx_1 \dots dx_N,$$

а производная по времени появилась из-за перехода к пределу

$$\frac{\dot{x}^2}{2a(x(t), t)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x_{l-1} - x_l)^2}{4\varepsilon a_l}.$$

Получившийся интеграл (8.12) берется по всем допустимым траекториям, удовлетворяющим граничным условиям (8.8). Он называется *интегралом по траекториям*, по путям или фейнмановским интегралом [17, 18]. В квантовой теории поля употребляется термин «континуальный интеграл». Точно вычислить можно только гауссовы интегралы, но для негауссовых разработаны эффективные приближенные методы.

Классическая траектория

Рассмотрим простейший случай $a = 1$, тогда (8.12) запишется как

$$G(x, x', t) = \int \mathcal{D}x(t) e^{-S}, \quad S = \frac{1}{4} \int_0^T \dot{x}^2 dt. \quad (8.13)$$

Мы не будем вычислять его точно, а только найдем экспоненциальную часть, которая набирается на классической траектории. Величина $S[x(t)]$ является функционалом траектории $x(t)$ и только множителем отличается от классического

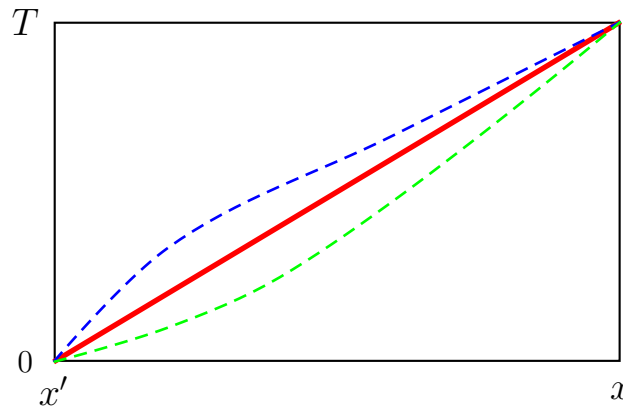


Рис. 8.1: Классическая траектория, дающая наибольший вклад в интеграл по путям (сплошная линия), и примеры других траекторий (штрихи) для уравнения теплопроводности.

свободной частицы при одномерном движении. Экстремаль функционала соответствует наименьшему действию, поэтому экспонента под интегралом там максимальна. Если действие записать как интеграл от функции Лагранжа $S = \int \mathcal{L} dt$, то варьируя его найдем уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}. \quad (8.14)$$

Для свободной частицы уравнение будет $\ddot{x} = 0$, его общее решение — линейная функция $x(t) = \alpha t + \beta$. Из граничных условий (8.8) найдем константы α, β

$$x(t) = \frac{x - x'}{T} t + x'.$$

На рис. 8.1 изображена классическая траектория свободной частицы и примеры других траекторий, действие на которых больше.

Обычно в классической механике ставится задача Коши с начальными условиями, но, как мы убедились, возможны и краевые задачи. Подставляя классическую траекторию в действие, находим

$$e^{-S} = e^{-\frac{(x-x')^2}{4T}}.$$

С точностью до предэкспоненциального множителя мы получили функцию Грина (8.5) уравнения теплопроводности. В данной задаче уравнение теплопроводности сохраняет нормировку начального условия, поэтому можно найти это множитель. В общем случае приближенное значение множителя можно найти из «квантовых поправок» в интеграле по траекториям. Траекторию $x(t)$ разлагают вблизи классической, удерживая квадратичные поправки. Тогда интеграл по траекториям становится гауссовым и вычисляется.

Упражнение 10. Найти предэкспоненциальный множитель фундаментального решения уравнения теплопроводности из условия нормировки и из «квантовых поправок».

Уравнение Фоккера—Планка

В виде интеграла по путям можно записать функции Грина других уравнений с более сложными операторами \hat{L} , чем уравнение (8.6). Ограничимся примером

$$\hat{L} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} x. \quad (8.15)$$

Параболическое уравнение

$$G_t = \hat{L}G, \quad G(x, x', 0) = \delta(x - x')$$

называется *уравнением Фоккера—Планка*. и используется в физической кинетике для описания релаксации функции распределения молекул газа к равновесию. Здесь u — функция распределения, x — безразмерная скорость в единицах тепловой, время t измеряется в единицах обратной частоты столкновений.

Оператор второй производной в (8.15) описывает диффузию в пространстве скоростей, которая размывает начальное распределение в виде δ -функции и размывает равномерно по скоростям. Оператор первой производной отвечает за динамическую силу трения, которая тормозит частицы, особенно быстрые, не давая размазаться по всем скоростям. В результате действия диффузии и трения стационарное распределение становится максвелловским

$$\hat{L}e^{-x^2} = 0.$$

Упражнение 11. Получить выражение для функции Грина уравнения Фоккера—Планка в виде интеграла по путям

$$G(x, x', t) = \int \mathcal{D}x(t) e^{-S}, \quad S = \frac{1}{2} \int_0^T (\dot{x} + x)^2 dt. \quad (8.16)$$

Найдем классическую траекторию, которая минимизирует действие (8.16). Уравнение Лагранжа (8.14) сводится к виду $\ddot{x} = x$. Можно прямо дифференцировать функцию Лагранжа, а можно сначала исключить полную производную по времени. Общее решение

$$x(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t}.$$

Начальные условия (8.8) приводят к системе двух уравнений на коэффициенты, откуда найдем частное решение

$$x(t) = \frac{(x - x'e^{-T})e^t - (x - x'e^T)e^{-t}}{e^T - e^{-T}}.$$

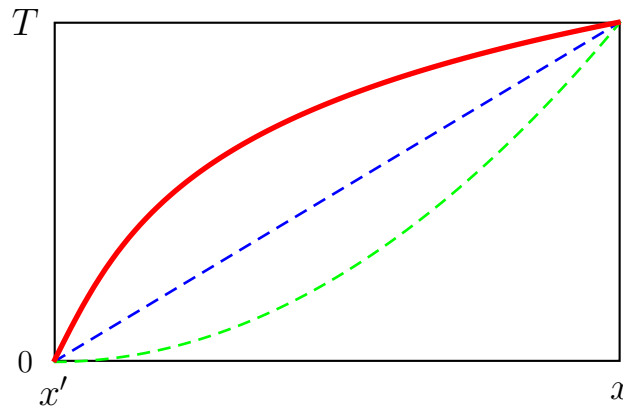


Рис. 8.2: Классическая траектория (сплошная линия) и другие траектории (штрихи) для уравнения Фоккера—Планка.

На рис. 8.2 приведена классическая траектория и два примера других траекторий.

Остается найти действие. Предэкспоненту можно найти из условия нормировки начального условия, потому что уравнение имеет дивергентный вид. Получится

$$G(x, x', t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1 - e^{-2T})}} \exp \left[-\frac{(x - x'e^{-T})^2}{1 - e^{-2T}} \right]. \quad (8.17)$$

На малых временах $T \ll 1$ экспоненты в (8.17) можно заменить единицей и получится функция Грина уравнения теплопроводности (8.5). При $T \gg 1$ экспонентами можно пренебречь и получится максвелловкое распределение по конечным скоростям. После нескольких столкновений молекулы «забывают» начальное условие для функции распределения.

ЛЕКЦИЯ 9

Операторный метод построения спектра

9.1 Суперзаряды

Мы рассмотрим только самые простые примеры из суперсимметричной квантовой механики. Желая ознакомиться с данной областью подробнее отсылаем к обзору [19]. Операторы рождения и уничтожения a^\dagger, a в квантовой механике обладают разными свойствами для бозонов или фермионов. Мы будем пользоваться теми и другими, поэтому обозначим их различными буквами.

Бозоны

Число бозонов $n = 0, 1, 2, \dots$ может быть произвольным. Операторы $b^+(b^-)$ увеличивают (уменьшают) n на единицу:

$$b^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad b^-|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle,$$

откуда для диагонального матричного элемента получается

$$\langle n|b^-b^+ - b^+b^-|n\rangle = (\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2 = 1.$$

Недиагональные матричные элементы обращаются в нуль, поэтому кратко можно записать свойства в виде одного коммутатора

$$[b^-, b^+] = 1. \tag{9.1}$$

Фермионы

Согласно принципу Паули имеется только две возможности $n = 0, 1$, тогда действие операторов f^-, f^+ определяется четырьмя соотношениями

$$\begin{aligned} f^+|0\rangle &= |1\rangle, & f^-|1\rangle &= |0\rangle, \\ f^+|1\rangle &= 0, & f^-|0\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $f^- f^+ = |1\rangle\langle 1|$, $f^+ f^- = |0\rangle\langle 0|$, а их сумма будет тождественным оператором. Все можно записать в виде одного антикоммулятора

$$\{f^-, f^+\} = 1. \quad (9.2)$$

Введем новые операторы, сочетающие свойства бозонных и фермионных

$$Q_+ = q b^- f^+, \quad Q_- = q b^+ f^-,$$

где q — числовой параметр. Главное свойство операторов Q — нильпотентность — унаследовано от фермионных операторов f :

$$Q_+^2 = Q_-^2 = 0. \quad (9.3)$$

Мы построили операторы таким образом, чтобы действуя на состояния $|n_b, n_f\rangle$ с n_b бозонов и n_f фермионов, они не меняли полного числа частиц

$$\begin{aligned} Q_+ |n_b, n_f\rangle &= q\sqrt{n_b} |n_b - 1, n_f + 1\rangle, \\ Q_- |n_b, n_f\rangle &= q\sqrt{n_b + 1} |n_b + 1, n_f - 1\rangle. \end{aligned}$$

Неудобство таких операторов заключается в их неэрмитовости.

Введем новые эрмитовы линейные комбинации

$$Q_1 = Q_+ + Q_-, \quad Q_2 = \frac{Q_+ - Q_-}{i}, \quad (9.4)$$

которые назовем *суперзарядами*. Введем также оператор Гамильтона

$$H = Q_1^2 = Q_2^2 = \{Q_+, Q_-\}.$$

Последнее равенство легко доказать, если воспользоваться определением суперзарядов (9.4) и нильпотентностью (9.3). Кратко соотношения для гамильтониана запишутся как

$$[Q_i, H] = 0, \quad \{Q_i, Q_j\} = 2H\delta_{ij}. \quad (9.5)$$

Набор соотношений для коммутаторов или антикоммутаторов называют алгеброй. Когда задана алгебра, можно забыть о том, откуда возникли соотношения (9.5), и доказать два свойства гамильтониана.

Свойства гамильтониана

Теорема 9.1. *Если выполнены соотношения (9.5), то оператор H имеет неотрицательный спектр.*

Действительно, пусть ψ_1 — собственная функция оператора Q_1 с собственным значением λ

$$Q_1\psi_1 = \lambda\psi_1,$$

тогда ψ_1 является в то же время собственной функцией H с собственным значением $E = \lambda^2$:

$$H\psi_1 = \lambda^2\psi_1.$$

Теорема 9.2. Если выполнены соотношения (9.5), то все собственные значения гамильтониана H с $E \neq 0$ двукратно вырождены.

Обозначим $\psi_2 = Q_2\psi_1$, тогда

$$Q_1\psi_2 = Q_1Q_2\psi_1 = -Q_2Q_1\psi_1 = -\lambda Q_2\psi_1 = -\lambda\psi_2.$$

То есть ψ_2 оказалась собственной функцией оператора Q_1 с собственным значением $-\lambda$. С другой стороны,

$$[H, Q_2] = 0 \Rightarrow H\psi_2 = HQ_2\psi_1 = Q_2H\psi_1 = Q_2\lambda^2\psi_1 = \lambda^2\psi_2.$$

Значит $\psi_2 \neq \psi_1$ также собственная функция H с тем же собственным значением λ^2 . Только при $\lambda = 0$ двукратного вырождения нет, поскольку $\psi_2 = Q_2\psi_1 = 0$.

9.2 Суперсимметричный осциллятор

До сих пор мы рассматривали абстрактные операторы Q_i и H и выводили их общие свойства, а теперь попробуем их реализовать, т.е. явно выписать. Из свойства (9.1) можно увидеть, что операторы b^\pm нельзя записать в виде конечных матриц. Поскольку след произведения двух матриц не зависит от порядка сомножителей, коммутатор конечных матриц не может быть равен единичной матрице. Поэтому попробуем реализовать бозонные операторы в виде дифференциальных операторов первого порядка, действующих на функциях бесконечномерного гильбертова пространства. В частности, годятся известные из квантовой механики операторы рождения и уничтожения одномерного линейного осциллятора

$$H_o = b^+b^- + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2 \right), \quad b^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mp ip + x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mp \frac{d}{dx} + x \right),$$

где мы положили $m = \hbar = \omega = 1$.

Фермионные операторы можно реализовать в виде матриц 2×2 , проекторов на состояния $(1, 0)$ и $(0, 1)$

$$f^+ = \sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2}, \quad f^- = \sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2}.$$

Теперь можно выписать суперзаряды и гамильтониан

$$Q_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{dx} + x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{d}{dx} + x & 0 \end{pmatrix},$$

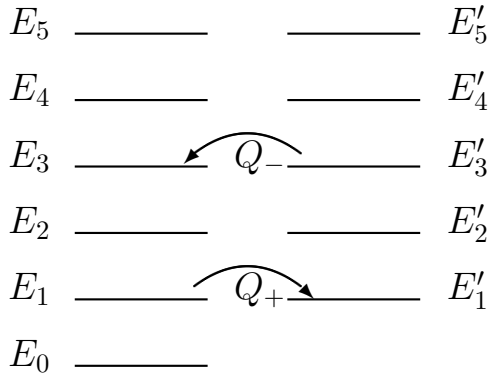
$$H = - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2 - 1 \right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2 + 1 \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^-b^+ & 0 \\ 0 & b^+b^- \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

Собственные значения энергии можно найти, если предварительно упростить гамильтониан. Воспользуемся тем, что операторы b и f можно переставлять, а «неправильные» комбинации b^-b^+ или f^-f^+ можно свести к «правильным» b^+b^- или f^+f^- , если воспользоваться перестановочными соотношениями (9.1),(9.2):

$$H = b^-f^+b^+f^- + b^+f^-b^-f^+ = (1 + b^+b^-)f^+f^- + b^+b^- (1 - f^+f^-) = \\ = b^+b^- + f^+f^- = \left(b^+b^- + \frac{1}{2}\right) + \left(f^+f^- - \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда следует, что собственные числа $E = (n_b + 1/2) + (n_f - 1/2)$. «Половинки» $+1/2$ и $-1/2$ в первой и второй скобке взаимно компенсируются и получается $E = n_b + n_f$.

Для рассмотренной реализации, которая называется *суперсимметричным осциллятором*, H - диагональная матрица (9.6), составленная из операторов



$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \quad (9.7)$$

а ее собственные значения отличаются ровно на единицу $1 = b^-b^+ - b^+b^-$. Наименьшее собственное значение оператора

$$H_- = b^+b^- = -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2 \right) - \frac{1}{2}$$

равно нулю, а все остальные уровни E_N расположены на равных расстояниях. Спектр E'_N оператора $H_+ = b^-b^+$ расположен на единицу выше

$$b^+b^-\psi_n = E_n\psi_n, \quad E_n = 0, 1, 2, \dots, \quad b^-b^+\psi_n = E'_n\psi_n, \quad E'_n = 1, 2, 3, \dots$$

Собственные функции, решение спектральной задачи

$$H\chi_N = \lambda_N^2\chi_N, \quad \chi_N = \begin{pmatrix} \psi'_N \\ \psi_N \end{pmatrix},$$

представляют собой столбец из двух функций $\psi'_N(x), \psi_N(x)$. Поскольку гамильтониан (9.7) диагонален, для каждого дифференциального оператора получается своя задача на собственные значения

$$H_+\psi'_N = E'_N\psi'_N, \quad H_-\psi_N = E_N\psi_N$$

с одинаковыми собственными значениями $E_N = E'_N = \lambda_N^2$, кроме нулевого уровня $N = 0$. Так и должно было получиться согласно общей теореме 9.2.

Таким образом, суперсимметричный осциллятор представляет собой два линейных осциллятора со смещенными на ступеньку друг относительно друга спектрами. Все его состояния кроме основного двукратно вырождены, как и должно быть по теореме 9.2. На рисунке показано, как под действием оператора Q_- происходит переход с системы уровней E'_i в систему $E_i, i = 1, 2, \dots$, а под действием оператора Q_+ обратный переход. Только основное состояние E_0 никуда не переходит

$$Q_+\chi_0 = 0, \quad \chi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_0 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $b^-\psi_0 = 0$.

9.3 Уравнение Шредингера

Форминвариантность

Все выводы предыдущего раздела, кроме эквидистантного спектра, относятся и к общему случаю. Чтобы гамильтониан оставался квадратичным по импульсам, можно выбрать бозонные операторы более общего вида

$$b^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mp ip + W(x)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\mp \frac{d}{dx} + W(x) \right],$$

где $W(x)$ — дифференцируемая функция. Рассмотренному простейшему примеру суперсимметричного осциллятора отвечает $W(x) = x$. Для гамильтониана и суперзарядов получаем

$$H = \begin{pmatrix} b^-b^+ & 0 \\ 0 & b^+b^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (p^2 + W^2 + \sigma_3 W'),$$

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-\sigma_2 p + \sigma_1 W), \quad Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 p + \sigma_2 W),$$

где $H_\pm = p^2/2 + U_\pm$, а потенциалы $U_\pm(x)$ выражаются через функцию $W(x)$:

$$U_\pm(x) = \frac{1}{2} [W^2(x) \pm W'(x)]. \quad (9.8)$$

Заметим, что в общем случае коммутатор $[b^+, b^-] = W'(x)$ может и не быть равным единице. Однако соотношения (9.5) выполняются, поэтому спектры операторов H_+ и H_- совпадают за исключением нижнего уровня оператора H_- . Можно построить волновую функцию, соответствующую нулевому невырожденному уровню, воспользовавшись соотношением $b^-\psi_0 = 0$:

$$\psi_0(x) = \exp \left(- \int^x W(x') dx' \right). \quad (9.9)$$

Чтобы собственные функции лежали в гильбертовом пространстве, они должны быть нормируемыми, что накладывает дополнительные ограничения на выбор функции $W(x)$. Процедуру представления потенциала уравнения Шредингера в форме (9.8) удастся выполнить аналитически лишь в нескольких частных случаях, потому что задача сводится к уравнению Рикатти, которое очень редко решается.

Тем не менее, если выполнено еще одно дополнительное условие, называемое *форминвариантностью*, можно построить спектр оператора H , не вычисляя производных и не решая дифференциальных уравнений. Нахождение спектра одномерного уравнения Шредингера для частицы в яме сводится к чисто алгебраической процедуре. Мы здесь рассмотрим только задачу построения спектра. Разумеется, в этом же случае можно построить явно и волновые функции уравнения Шредингера.

Определение 9.1. Потенциал называется *форминвариантным*, если U_- и U_+ отличаются друг от друга только параметрами $a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)})$ и аддитивной добавкой

$$U_+(a, x) = U_-(a_1, x) + R(a_1), \quad a_1 = f(a), \quad (9.10)$$

где $R(a_1)$ — добавка, а $a_1 = (a_1^{(1)}, a_1^{(2)}, \dots, a_1^{(k)})$ совокупность «новых» параметров, которые получаются из «старых» с помощью отображения f .

Построение спектра

Рассмотрим спектральную задачу для одномерного уравнения Шредингера (частица в яме)

$$H\psi_N = E_N\psi_N, \quad H = \frac{p^2}{2} + U(a, x),$$

где H — уже не матрица, а дифференциальный оператор второго порядка, а потенциал зависит от координаты x и параметра a . Пусть потенциал U отличается от U_- на аддитивную добавку $U(a, x) = U_-(a, x) + c(a)$ где $c(a)$ разница между потенциалом U и потенциалом U_- , удовлетворяющим условию (9.10). Для этого рассмотрим серию вспомогательных гамильтонианов, которые получаются из $H_0 \equiv H_- = p^2/2 + U_-$ последовательным применением функционального равен-

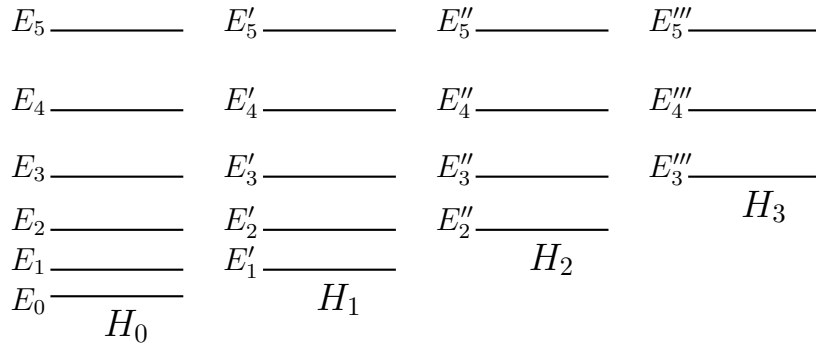


Рис. 9.1: Схема уровней гамильтонианов H_i .

ства (9.10):

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \frac{p^2}{2} + U_-(a, x), \\
 H_1 &= \frac{p^2}{2} + U_+(a, x) = \frac{p^2}{2} + U_-(a_1, x) + R(a_1), & a_1 &= f(a) \\
 H_2 &= \frac{p^2}{2} + U_+(a_1, x) + R(a_1) = \frac{p^2}{2} + U_-(a_2, x) + R(a_1) + R(a_2), & a_2 &= f(a_1) \\
 \dots & & \dots & \\
 H_N &= \frac{p^2}{2} + U_-(a_N, x) + R(a_1) + R(a_2) + \dots + R(a_N), & a_N &= f(a_{N-1}).
 \end{aligned}$$

Диаграмма уровней вспомогательных гамильтонианов показана на рис. 9.1. В общем случае спектры не эквидистантные. Тем не менее, для каждой пары соседних вспомогательных гамильтонианов выполняется теорема 9.2. Поэтому спектры операторов H_i, H_{i+1} , стоящих в соседних строчках формулы (или в соседних колонках рисунка 9.1), совпадают за исключением нижнего уровня оператора H_i . Значит энергия уровня N есть просто сумма функций $R(a_i)$

$$E_N = c(a) + \sum_{i=1}^N R(a_i), \quad a_{i+1} = f(a_i). \tag{9.11}$$

Примеры

Пример 9.1 (Линейный осциллятор). Потенциал линейного осциллятора $U = x^2/2$, рис. 9.2. Выберем функцию $W(x) = x$, тогда $U_-(x) = (W^2 - W')/2 = (x^2 - 1)/2$, значит $c = U(x) - U_-(x) = 1/2$. Потенциал $U_+ = (W^2 + W')/2 = U_-(x) + 1$, поэтому функция $R = 1$, а f — тождественное отображение. Спектр осциллятора сразу

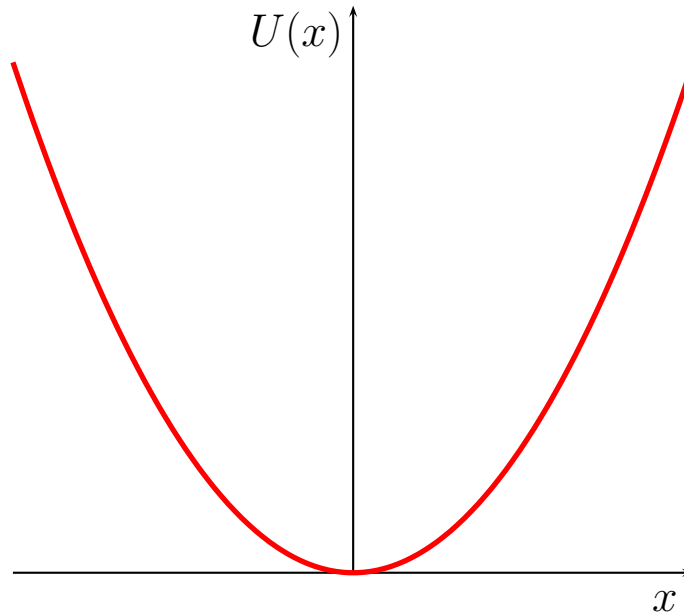


Рис. 9.2: Потенциал одномерного осциллятора.

получается из общего выражения (9.11)

$$E_N = c + \sum_{i=1}^N R = \frac{1}{2} + N.$$

Уровни, как и должно быть, получились эквидистантными.

Пример 9.2 (Потенциал Пешля—Теллера). При разделении переменных в задаче о движении частицы в центрально-симметричном поле возникает угловое уравнение

$$\frac{d^2\psi}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{d\psi}{d\theta} - \frac{m^2\psi}{\sin^2\theta} = -\lambda\psi,$$

где m — азимутальное квантовое число, θ — угол в сферических координатах, рис. 9.3. Приведем уравнение к каноническому виду преобразованием Лиувилля

$$\psi = u(\theta)/\sqrt{\sin\theta}$$

и получим уравнение Шредингера

$$u'' + \left(\frac{1}{4} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2\theta} \right) u = \lambda u$$

с потенциалом Пешля—Теллера [20]

$$U(\theta) = -\frac{1}{8} + \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{2\sin^2\theta}, \quad E = \frac{\lambda}{2}.$$

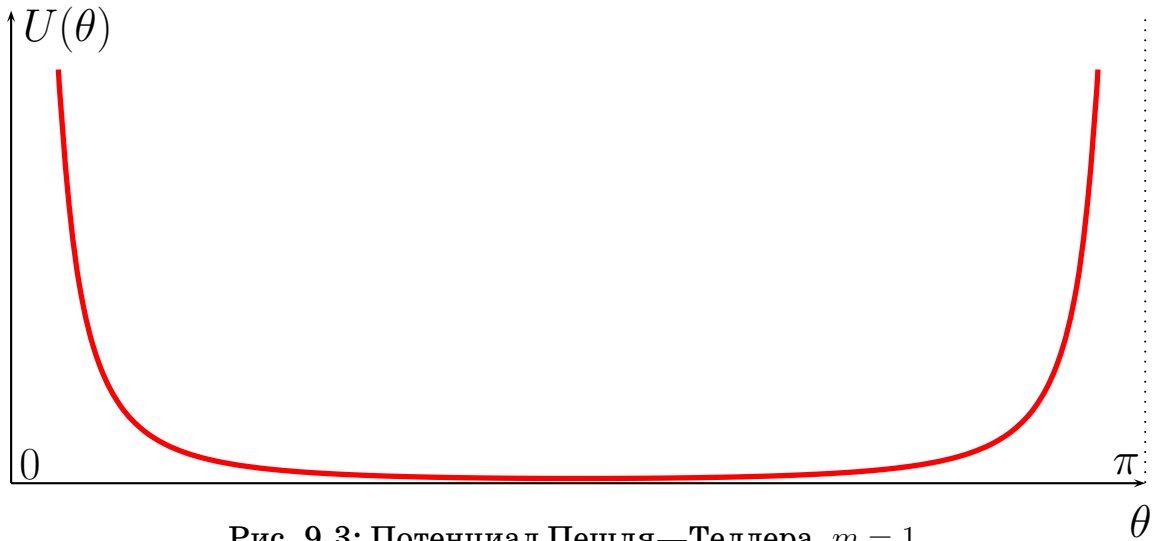


Рис. 9.3: Потенциал Пешля—Теллера, $m = 1$.

Выберем $W(a, \theta) = a \operatorname{ctg} \theta$, получится

$$U_-(a, \theta) = \frac{1}{2} (W^2 - W') = \frac{a(a+1)}{2 \sin^2 \theta} - \frac{a^2}{2}.$$

Чтобы получить потенциал $U(x)$, надо выбрать $a = -|m| - 1/2$, $c(a) = |m|(|m| + 1)/2$. Второй корень квадратного уравнения $a(a+1) = m^2 - 1/4$ не подходит, потому что дает волновую функцию основного состояния (9.9) $\psi \propto (\sin \theta)^{-a-1/2}$, имеющую сингулярность при $\theta \rightarrow 0, \pi$. «Верхний» потенциал переходит в «нижний» с уменьшенным на единицу параметром a , $f(a) = a - 1$,

$$U_+(a, \theta) = \frac{1}{2} (W^2 + W') = \frac{a(a-1)}{2 \sin^2 \theta} - \frac{a^2}{2} = U_-(a-1, \theta) - \frac{a^2}{2} + \frac{(a-1)^2}{2}.$$

Найденная форминвариантность позволяет записать спектр

$$E_N = -\frac{1}{8} + \frac{(-|m| - 1/2 - N)^2}{2} = \frac{(N + |m|)(N + |m| + 1)}{2} \Rightarrow \lambda_l = l(l + 1).$$

Здесь $N = 0, 1, 2, \dots$, а $l = |m|, |m| + 1, |m| + 2, \dots$ — орбитальное квантовое число.

Пример 9.3 (Кулоновский потенциал). Радиальное уравнение Шредингера для задачи Кеплера решается с потенциалом

$$U(r) = -\frac{1}{r} + \frac{l(l+1)}{2r^2}, \tag{9.12}$$

где $l = 0, 1, 2, \dots$ — орбитальное квантовое число, а второе слагаемое, центробежная энергия, возникает при разделении переменных в сферических координатах, рис. 9.4. Выберем $W(a, b, r) = a/r + b$, тогда

$$U_-(a, b, r) = \frac{1}{2} \left(\frac{a(a+1)}{r^2} + \frac{2ab}{r} + b^2 \right). \tag{9.13}$$

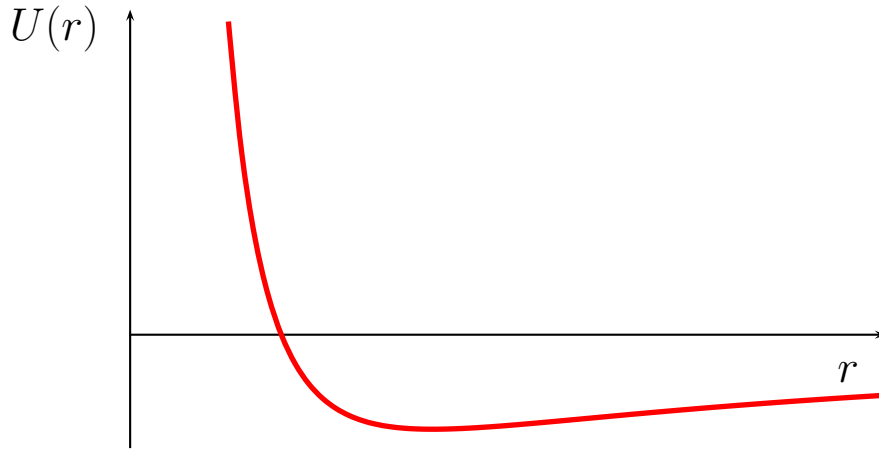


Рис. 9.4: Потенциал радиального уравнения Шредингера для атома водорода при $l = 0$.

Чтобы коэффициенты при степенях r совпадали в формулах (9.12) и (9.13), надо выбрать $a = -l - 1, b = -1/a, c(a, b) = -b^2/2$. Второй корень $a = l$ квадратного уравнения не годится, потому что волновая функция основного состояния (9.9) $\psi \propto r^{-a}e^{-br}$ имела бы тогда особенности при $r \rightarrow 0, \infty$.

Найдем «верхний» потенциал

$$U_+(a, b, r) = \frac{1}{2} \left(\frac{a(a-1)}{r^2} + \frac{2ab}{r} + b^2 \right) = U_-(a_1, b_1, r) + R(a_1, b_1).$$

Для выполнения требования форминвариантности следует взять $a_1 = f(a) = a - 1, b_1 = -1/a_1$, тогда

$$R(a_1, b_1) = \frac{b^2}{2} - \frac{b_1^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a_1^2} \right).$$

Теперь можно сразу выписать собственные значения энергии

$$E_N = -\frac{1}{2a^2} + \left(\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2a_1^2} \right) + \left(\frac{1}{2a_1^2} - \frac{1}{2a_2^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2a_{N-1}^2} - \frac{1}{2a_N^2} \right) = -\frac{1}{2a_N^2}.$$

Подставляя $a = -l - 1$, получаем формулу Бальмера $E_N = -1/2(N + l + 1)^2 = -1/2n^2, N = 0, 1, 2, \dots$ — радиальное квантовое число; $n = l + 1, l + 2, \dots$ — главное квантовое число.

Замечание 9.1. Рассмотренные нами примеры применения форминвариантности для нахождения спектра тесно связаны с системами ортогональных полиномов. Первый пример, осциллятор, имеет волновые функции в виде произведения гауссовой функции на полиномы Эрмита. Во втором примере получатся полиномы Лежандра. Третий пример связан с полиномами Лагерра, через которые выражаются радиальные волновые функции атома водорода [2].

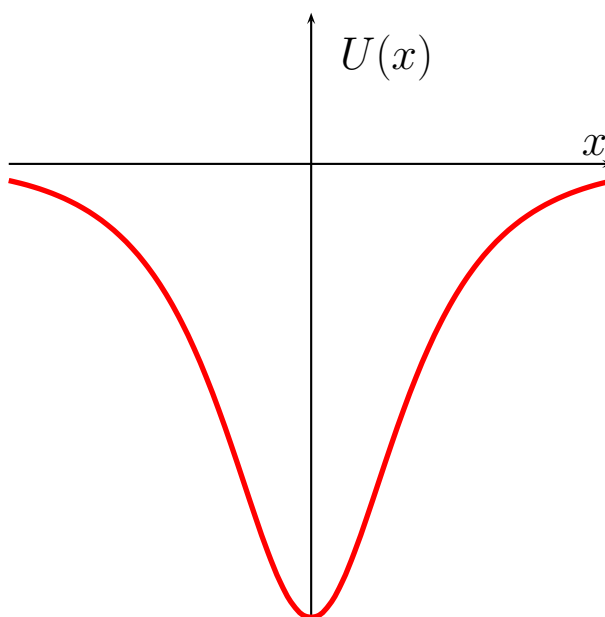


Рис. 9.5: Безотражательный потенциал модифицированного уравнения Пешля—Теллера.

Упражнение 12. Подберите подходящую функцию $W(x)$ для модифицированного уравнения Пешля—Теллера с безотражательным потенциалом $U(x) = -a(a+1)/\text{ch}^2 x$, $a > 0$ (рис. 9.5) и постройте спектр. Убедитесь, что в такой яме имеется лишь конечное число связанных состояний и найдите это число.

Упражнение 13. Для пространственного осциллятора

$$U(r) = \frac{r^2}{2} + \frac{l(l+1)}{2r^2}$$

подберите функцию вида $W = ar + br^{-1}$ и постройте спектр. Какова его кратность вырождения?

ЛЕКЦИЯ 10

Симметрия дифференциальных уравнений

Известно, что наиболее важные операторы в уравнениях математической физики это дифференциальные операторы второго порядка. Среди них чаще встречаются *оператор Даламбера* для волнового уравнения и оператор Лапласа. Для этих дифференциальных операторов даже есть специальные обозначения

$$\square_n = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_n, \quad \Delta_n = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Мы найдем, относительно каких преобразований инвариантны операторы Лапласа и Даламбера в простейших случаях. Это будет и иллюстрация общего подхода по поиску симметрии дифференциальных уравнений в частных производных.

Поиском групп инвариантности дифференциальных уравнений посвящено много математических книг: от сравнительно простых [21] до сложных и строгих [22–24]. Главная идея этих поисков состоит в поиске дифференциальных операторов первого порядка, которые коммутируют с операторами второго порядка. Затем из операторов первого порядка строится алгебра Ли, а по ней восстанавливается вся группа симметрии.

10.1 Симметрия дифференциального оператора

Пусть \hat{Q} — заданный дифференциальный оператор второго порядка в \mathbb{R}^n и нас интересует симметрия однородного линейного уравнения

$$\hat{Q}u = 0. \tag{10.1}$$

Пусть найден оператор первого порядка \hat{L} , коммутатор которого задается формулой

$$[\hat{L}, \hat{Q}] = f(x)\hat{Q}, \tag{10.2}$$

где $f(x)$ функция $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда \hat{L} называется *оператором симметрии* уравнения (10.1). Если u является решением уравнения (10.1), то и $\hat{L}u$ тоже решение. Чтобы показать это, подставим $\hat{L}u$ в уравнение (10.1) и воспользуемся коммутатором (10.2)

$$\hat{Q}(\hat{L}u) = \hat{L}\hat{Q}u + f(x)\hat{Q}u = 0.$$

Если найдены два генератора симметрий \hat{L}_1, \hat{L}_2 то и их коммутатор будет генерировать симметрию, а $[\hat{L}_1, \hat{L}_2]u$ будет решением:

$$\begin{aligned} \hat{Q}[\hat{L}_1, \hat{L}_2]u &= [\hat{Q}, [\hat{L}_1, \hat{L}_2]]u + [\hat{L}_1, \hat{L}_2]\hat{Q}u = \\ &= -[\hat{L}_2, [\hat{Q}, \hat{L}_1]]u - [\hat{L}_1, [\hat{L}_2, \hat{Q}]]u = \\ &= [\hat{L}_2, f_1\hat{Q}]u - [\hat{L}_1, f_2\hat{Q}]u = \\ &= (\hat{L}_2f_1 - \hat{L}_1f_2)\hat{Q}u = 0, \end{aligned}$$

где $f_i, i = 1, 2$ функции, возникающие при коммутировании этих двух генераторов $[\hat{L}_i, \hat{Q}] = f_i\hat{Q}$. Значит надо найти всю алгебру Ли, чтобы коммутаторы генераторов выражались линейно через другие генераторы. Затем по генераторам (инфинитезимальным операторам) можно восстановить группу симметрии данного дифференциального уравнения. Мы не будем останавливаться на неоднозначности восстановления полной группы симметрии, см. [25], а только приведем два примера.

10.2 Уравнение Гельмгольца

Пусть $\hat{Q} = \Delta_2 + k^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2 + k^2$, двумерный *оператор Гельмгольца*. Ищем генераторы вида $\hat{L} = a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y + c(x, y)$. Согласно формуле (10.2) надо подобрать функции a, b, c так, чтобы

$$[\hat{L}, \hat{Q}] = f(x, y)\hat{Q}.$$

Пользуясь формулой для коммутатора произведения $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$, найдем коммутатор $[\hat{L}, \hat{Q}]$ и приравняем коэффициенты при различных производных. Получится система уравнений в частных производных

$$2a_x = 2b_y = -f, \quad a_y + b_x = 0, \quad (10.3)$$

$$a_{xx} + a_{yy} + 2c_x = 0, \quad b_{xx} + b_{yy} + 2c_y = 0, \quad (10.4)$$

$$c_{xx} + c_{yy} = -fk^2. \quad (10.5)$$

Из уравнений (10.3) следуют соотношения Коши—Римана $a_x = b_y, a_y = -b_x$, откуда видно, что a, b — гармонические функции: $a_{xx} + a_{yy} = b_{xx} + b_{yy} = 0$. Тогда из (10.4) получается $c = \text{const}$. Теперь из (10.5) следует, что $f = 0$, а значит из (10.3) можно найти

$$a = c_1 - c_3y, \quad b = c_2 + c_3y, \quad c = c_4.$$

В решение вошло 4 константы c_1, c_2, c_3, c_4 , но последняя нас не будет интересовать и мы положим ее равной нулю. Остается три генератора

$$\hat{L}_1 = -\partial_x, \quad \hat{L}_2 = -\partial_y, \quad \hat{L}_3 = x\partial_y - y\partial_x.$$

Упражнение 14. Найдите коммутационные соотношения между генераторами

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = 0, \quad [\hat{L}_1, \hat{L}_3] = L_2, \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3] = -L_1. \quad (10.6)$$

С помощью экспоненциальной формулы по генераторам можно найти конечные преобразования, однопараметрические подгруппы, которые ими генерируются. Пусть α — параметр, тогда $g_1(\alpha) = \exp[-\alpha\hat{L}_1]$. Полученную экспоненту можно вычислить, если продифференцировать по параметру. Получится уравнение

$$\frac{\partial g_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial g_1}{\partial x} = 0.$$

Уравнение получилось первого порядка, поэтому его легко решить методом характеристик. Общее решение получится вида $g_1 = g(x - \alpha)$, где g произвольная функция одной переменной. Значит операторы \hat{L}_1, \hat{L}_2 генерирует трансляцию вдоль осей x и y , соответственно. Аналогично можно показать, что оператор \hat{L}_3 генерирует конечный поворот.

Таким образом, найденная тройка операторов генерирует группу \mathcal{E}_2 движений двумерного евклидова пространства. Если бы мы рассмотрели трехмерный оператор Гельмгольца, получилась бы шестипараметрическая группа движений евклидова пространства \mathcal{E}_3 , содержащая три вращения и три трансляции.

Упражнение 15. Три трансляции можно записать в виде одного вектора трансляции $\hat{P} = -\nabla$, а три вращения в виде одного вектора поворота $\hat{L} = \mathbf{r} \times \nabla$. Проверьте коммутационные соотношения

$$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0, \quad [\hat{L}_i, \hat{L}_j] = e_{ijk}\hat{L}_k, \quad [\hat{L}_i, \hat{P}_j] = -e_{ijk}\hat{P}_k. \quad (10.7)$$

10.3 Оператор Даламбера

Рассмотрим оператор $\hat{Q} = \square_1 + k^2 = \partial_t^2 - \partial_x^2 + k^2$ и будем искать оператор первого порядка вида $u(x, t)\partial_t + v(x, t)\partial_x + w(x, t)$. Согласно формуле (10.2) находим коммутатор и приравниваем коэффициенты при вторых, первых и нулевых производных. Получается система уравнений

$$\begin{aligned} 2u_t &= -f = 2v_x, & v_t &= u_x, \\ u_{tt} - u_{xx} + 2w_t &= 0, & v_{tt} - u_{xx} + 2w_x &= 0, \\ & & w_{tt} - w_{xx} &= -k^2 f. \end{aligned}$$

Из первой строки получается, что $v_x = u_t, v_t = u_x$, тогда во второй строке $u_{tt} - u_{xx} = v_{tx} - v_{xt} = 0$ и $v_{tt} - v_{xx} = 0$. Значит $w_t = w_x = 0, \square_1 w = 0 = f$. Получается трехпараметрическая алгебра операторов

$$\hat{L}_1 = -\partial_t, \quad \hat{L}_2 = -\partial_x, \quad \hat{L}_3 = x\partial_t + t\partial_x$$

с коммутационными соотношениями

$$[\hat{L}_1, \hat{L}_2] = 0, \quad [\hat{L}_1, \hat{L}_3] = L_2, \quad [\hat{L}_2, \hat{L}_3] = L_1. \quad (10.8)$$

Отличие от предыдущего случая только в одном знаке выражения \hat{L}_3 и в одном знаке третьего коммутационного соотношения. Первые два генератора все так же порождают трансляции по времени и координате, а третий из-за другого знака гиперболический поворот (буст) с параметром b

$$t' = t \operatorname{ch} b + x \operatorname{sh} b, \quad x' = t \operatorname{sh} b + x \operatorname{ch} b.$$

Если мы обозначим $\beta = \operatorname{th} b$, получится преобразование Лоренца

$$t' = \frac{t + \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad x' = \frac{\beta t + x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

10.4 Группа Лоренца

Преобразования Лоренца образуют однопараметрическую подгруппу группы Лоренца \mathcal{L} . Всего в группе Лоренца 6 параметров: три поворота и три буста. С точки зрения теории групп Ли, группа Лоренца — это группа $\mathrm{SO}(1, 3)$, группа ортогональных преобразований четырехмерного пространства, сохраняющая форму $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$. Число перед запятой в обозначении группы указывает количество квадратов со знаком «плюс» в этой форме, а число после запятой — число квадратов со знаком «минус». Группа вращений трехмерного пространства $\mathrm{SO}(3)$ является ее трехпараметрической подгруппой. Если к группе Лоренца добавить четыре трансляции, получится 10-параметрическая группа Пуанкаре \mathcal{P} , относительно которой инвариантен трехмерный оператор Даламбера.

Можно поступить наоборот. Сохранение квадратичной формы

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (10.9)$$

считать определением группы Лоренца. Преобразование Лоренца зададим матрицей $\hat{\Lambda}$

$$y_\alpha = \sum_{\beta=0}^3 \Lambda_{\alpha\beta} x_\beta.$$

Ведem вектор-столбец \mathbf{X} и матрицу \hat{F}

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \hat{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишем сохранение квадрата интервала (10.9) в матричном виде

$$s^2 = \mathbf{X}^T \hat{F} \mathbf{X} = \mathbf{Y}^T \hat{F} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y} = \hat{\Lambda} \mathbf{X}. \quad (10.10)$$

Подставляя определение вектора \mathbf{Y} в сохранение интервала получим

$$\mathbf{X}^T \hat{F} \mathbf{X} = (\hat{\Lambda} \mathbf{X})^T \hat{F} \hat{\Lambda} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T \hat{\Lambda}^T \hat{F} \hat{\Lambda} \mathbf{X},$$

следовательно

$$\hat{F} = \hat{\Lambda}^T \hat{F} \hat{\Lambda}. \quad (10.11)$$

Условию (10.11) удовлетворяет более широкое множество преобразований, чем рассмотренное выше. Это множество называется *общей* группой Лоренца.

Вычислим определители левой и правой частей соотношения (10.11), получим $\det \hat{\Lambda}^2 = 1$. Стало быть общая группа Лоренца разбивается на два множества \mathcal{L}_+ и \mathcal{L}_- с определителями $\det \hat{\Lambda} = 1$ и $\det \hat{\Lambda} = -1$. Множество \mathcal{L}_+ с положительным определителем содержит единичную матрицу и поэтому само по себе образует группу. Множество \mathcal{L}_- не является группой, хотя при объединении с \mathcal{L}_+ получается группа более широкая, чем \mathcal{L}_+ .

Теперь запишем элемент, стоящий на пересечении первой строки и первого столбца соотношения (10.11)

$$\Lambda_{00}^2 - \Lambda_{10}^2 - \Lambda_{20}^2 - \Lambda_{30}^2 = 1.$$

Отсюда следует неравенство $\Lambda_{00}^2 \geq 1$, откуда $\Lambda_{00} \geq 1$ либо $\Lambda_{00} \leq -1$. Таким образом общая группа Лоренца разбивается на четыре множества

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{L}_+^+ & \mathcal{L}_+^- & \mathcal{L}_-^+ & \mathcal{L}_-^- \\ \Lambda_{00} \geq 1 & \Lambda_{00} \leq -1 & \Lambda_{00} \geq 1 & \Lambda_{00} \leq -1 \\ \det \hat{\Lambda} = 1 & \det \hat{\Lambda} = 1 & \det \hat{\Lambda} = -1 & \det \hat{\Lambda} = -1 \end{array}$$

Внутри каждого множества матрицы могут быть получены друг из друга непрерывным преобразованием, значит как многообразие общая группа Лоренца несвязна и распадается на 4 компоненты связности. Только в \mathcal{L}_+^+ содержится единичная матрица. Значит только \mathcal{L}_+^+ образует группу, которая называется *собственной* группой Лоренца $\mathcal{L} \approx \text{SO}(1, 3)$ и рассматривалась раньше. Если добавить преобразования третьего типа \mathcal{L}_-^+ , получится группа Лоренца с инверсией \mathcal{L}_s . Преобразования \mathcal{L}_+^- второго типа добавляют инверсию времени, а преобразования \mathcal{L}_-^- четвертого типа содержат обе инверсии [26, 27].

ЛЕКЦИЯ 11

Представления группы Лоренца

Строгая математическая теория представлений группы Лоренца достаточно сложная, см. [28–30]. Здесь мы приведем только несколько ее основных понятий.

11.1 Связь с группой вращений

Размерность группы собственных преобразований Лоренца $\mathcal{L} \approx \text{SO}(1, 3)$ равна $\dim \mathcal{L} = 6$. Это можно увидеть из общей теории групп Ли или из условия (10.11). $(\hat{\Lambda}^T \hat{F} \hat{\Lambda})^T = \hat{\Lambda}^T \hat{F} \hat{\Lambda}$, т.е. матрица \hat{F} симметрична. Значит равенство (10.11) налагает 10 условий на матричные элементы, а значит из 16 элементов матрицы Лоренца только 6 независимы. Удобно выбрать в качестве шести параметров углы поворотов в двумерных плоскостях $(x_0x_1), (x_0x_2), (x_0x_3), (x_1x_2), (x_1x_3), (x_2x_3)$.

Группа четырехмерных вращений $\text{SO}(4)$ также шестипараметрическая. Если координаты евклидова пространства, где производятся преобразования тоже обозначить x_0, x_1, x_2, x_3 , то инвариантом группы ортогональных преобразований будет положительно определенная квадратичная форма

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \quad (11.1)$$

Рассмотрим поворот в плоскости (x_0x_1) на угол φ

$$x'_0 = x_0 \cos \varphi - x_1 \sin \varphi, \quad x'_1 = x_0 \sin \varphi + x_1 \cos \varphi. \quad (11.2)$$

Теперь рассмотрим равенство (11.2) при мнимых значениях x_0, φ , то есть заменим $x_0 \rightarrow ix_0, x'_0 \rightarrow ix'_0, \varphi \rightarrow i\varphi$. Поворот (11.2) перейдет в гиперболический поворот

$$x'_0 = x_0 \text{ch } \varphi + x_1 \text{sh } \varphi, \quad x'_1 = x_0 \text{sh } \varphi + x_1 \text{ch } \varphi. \quad (11.3)$$

Аналогично можно отобразить повороты $\text{SO}(4)$ в плоскостях $(x_0x_2), (x_0x_3)$ в бусты \mathcal{L} . Повороты в остальных плоскостях $(x_1x_2), (x_1x_3), (x_2x_3)$ в обеих группах

устроены одинаково. Итак, мы построили отображение группы вращений четырехмерного пространства в группу Лоренца. Поскольку группа $\mathbf{SO}(4)$ компактна, а $\mathbf{SO}(1, 3)$ некомпактна, это отображение будет работать только в окрестности единицы групп.

11.2 Генераторы

Матрицы группы Лоренца можно записать как произведения шести матриц вида

$$\begin{aligned}\hat{R}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}, \\ \hat{R}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_2 & 0 & \sin \varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}, \\ \hat{R}_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ 0 & \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\end{aligned}\tag{11.4}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_1 &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} b_1 & \operatorname{sh} b_1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} b_1 & \operatorname{ch} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{H}_2 &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} b_2 & 0 & \operatorname{sh} b_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sh} b_2 & 0 & \operatorname{ch} b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{H}_3 &= \begin{pmatrix} \operatorname{ch} b_3 & 0 & 0 & \operatorname{sh} b_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh} b_3 & 0 & 0 & \operatorname{ch} b_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{11.5}$$

Генераторы получатся дифференцированием по параметрам группы

$$\hat{L}_i = \left. \frac{\partial \hat{R}_i}{\partial \varphi_i} \right|_{\varphi_i=0}, \quad \hat{M}_i = \left. \frac{\partial \hat{H}_i}{\partial b_i} \right|_{b_i=0}.$$

Генераторы вращений в группах $\mathbf{SO}(1, 3)$ и $\mathbf{SO}(4)$ в плоскостях (x_2x_3) , (x_1x_3) , (x_1x_2)

одинаковые. Введем вектор вращений $\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3)$.

$$\hat{L}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Генераторы бустов

$$\hat{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

тоже собираются в один трехмерный вектор $\hat{\mathbf{M}} = (\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3)$. Значит всего получится 18 коммутационных соотношений

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = e_{ijk} \hat{L}_k, \quad [\hat{M}_i, \hat{M}_j] = -e_{ijk} \hat{L}_k, \quad [\hat{M}_i, \hat{L}_j] = e_{ijk} \hat{M}_k. \quad (11.6)$$

Чтобы представление было унитарным, генераторы бустов должны быть антиэрмитовыми матрицами. Генераторы $\hat{\mathbf{L}}$ меняют знак после транспонирования, а генераторы $\hat{\mathbf{M}}$ не меняют. Перейдем к комплексным антиэрмитовым генераторам. Тогда представление группы станет унитарным.

Упражнение 16. Покажите, что если вести комплексные векторы

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{\hat{\mathbf{L}} + i\hat{\mathbf{M}}}{2}, \quad \hat{\mathbf{B}} = \frac{\hat{\mathbf{L}} - i\hat{\mathbf{M}}}{2},$$

то из (11.6) получатся «распавшиеся» коммутационные соотношения

$$[\hat{A}_i, \hat{A}_j] = e_{ijk} \hat{A}_k, \quad [\hat{B}_i, \hat{B}_j] = e_{ijk} \hat{B}_k, \quad [\hat{A}_i, \hat{B}_j] = 0. \quad (11.7)$$

11.3 Неприводимые представления

Красивый вид полученных соотношений объясняется тем, что мы фактически перешли к генераторам группы $\text{SO}(4) \approx \text{SO}(3) \times \text{SO}(3)$, которая изоморфна прямому произведению двух групп трехмерных вращений. Значит для построения неприводимого представления группы Лоренца мы можем воспользоваться известными неприводимыми представлениями группы трехмерных вращений с моментами j, j' , если выбрать в качестве операторов Казимира квадраты двух коммутирующих «моментов» $\hat{\mathbf{A}}^2, \hat{\mathbf{B}}^2$. Обозначим эти представления $D^{(jj')} = D^{(j)} \otimes D^{(j')}$. Размерности этих представлений равны

$$\dim D^{(jj')} = (2j + 1)(2j' + 1).$$

В качестве базиса неприводимого представления можно выбрать векторы $|jj'mm'\rangle$.

Разложение прямого произведения неприводимых представлений в прямую сумму тоже дается известными формулами Клебша—Гордана для группы вращений трехмерного пространства

$$D^{(j_1 j_1')} \otimes D^{(j_2 j_2')} = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} \bigoplus_{j'=|j_1'-j_2'|}^{j_1'+j_2'} D^{(jj')}. \quad (11.8)$$

Скалярное неприводимое представление $D^{(00)}$ не является точным и сводит все групповые операции к умножению на единицу. Спинорное представление $D^{(1/2,0)}$ состоит из матриц 2×2 . Из матриц 2×2 состоит и представление $D^{(0,1/2)}$. Четырехмерное представление $D^{(1/2,1/2)}$ является фундаментальным и состоит из матриц 4×4 . Каждая матрица этого представления может быть представлена в виде произведения шести матриц: трех поворотов (11.4) и трех бустов (11.5).

ЛЕКЦИЯ 12

Конструирование инвариантных уравнений

Уравнение Дирака описывает релятивистские электрон и позитрон. Уравнение должно удовлетворять следующим требованиям:

1. *Линейность*, чтобы соблюдался принцип суперпозиции волновых функций.
2. *Первый порядок* по времени, чтобы можно было решить задачу Коши.
3. Билинейная комбинация $\psi^\dagger\psi$ должна иметь смысл плотности вероятности.
4. *Правильная зависимость энергии от импульса* $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$.
5. *Релятивистская инвариантность*

Вывод уравнения Дирака обычно начинается с построения базиса неприводимого представления группы Лоренца — теории биспиноров [31]. Следуя книге [27], мы приведем другой вывод, основанный на разложении Клебша—Гордана (11.8).

12.1 Инвариантная система уравнений

Запишем систему линейных уравнений общего вида

$$\hat{I}_0 \frac{\partial \psi}{\partial x_0} + \hat{I}_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \hat{I}_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \hat{I}_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + i\kappa\psi = 0, \quad (12.1)$$

где

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

вектор-столбец n неизвестных функций от переменных x_0, x_1, x_2, x_3 , а $I_0, I_1, I_2, I_3, \kappa$ матрицы.

Рассмотрим вопрос об инвариантности системы (12.1) относительно преобразований группы Лоренца \mathcal{L} . Пусть

$$x'_\alpha = \sum_{\beta} \Lambda_{\alpha\beta} x_\beta, \quad \hat{\Lambda} \in \mathcal{L} \quad (12.2)$$

координаты пространственно-временной точки в другой системе отсчета. Тогда и сама вектор-функция ψ преобразуется некоторой матрицей \mathbf{D}

$$\psi'_i(x') = \sum_{\beta} D_{i\beta}(\Lambda) \psi_\beta(x), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Совершим еще одно преобразование Лоренца $x'' = \hat{\Lambda}' x'$

$$\psi''_k(x'') = \sum_l D_{kl}(\Lambda') \psi'_l(x') = \sum_{l,j} D_{kl}(\Lambda') D_{lj}(\Lambda) \psi_j(x) = \sum_j D_{kj}(\Lambda'') \psi_j(x),$$

откуда получается, что матрица композиции преобразований Λ'' равна произведению матриц отдельных преобразований

$$D_{\gamma\beta}(\Lambda'') = \sum_{\delta} D_{\gamma\delta}(\Lambda') D_{\delta\beta}(\Lambda).$$

Это означает, что матрицы \mathbf{D} образуют представление группы размерности n .

Чтобы записать уравнение (12.1) в штрихованной системе, надо подставить туда преобразованные компоненты неизвестной вектор-функции, заменить координаты

$$\psi(x) = \mathbf{D}^{-1}(\Lambda) \psi'(x'),$$

и преобразовать дифференциальные операторы в соответствии с преобразованием координат (12.2)

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \sum_{\beta} \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x'_\beta}.$$

Получится

$$\sum_{\alpha,\beta=0}^3 I_\alpha \mathbf{D}^{-1} \Lambda_{\alpha\beta} \frac{\partial \psi'}{\partial x'_\beta} + i \kappa \mathbf{D}^{-1} \psi' = 0. \quad (12.3)$$

Пусть матрица κ невырождена. Тогда преобразованием подобия $\kappa = \mathbf{T} \kappa' \mathbf{T}^{-1}$ ее можно сделать единичной матрицей. Пусть матрица κ уже единичная.

Теперь умножим слева уравнение (12.3) на матрицу \mathbf{D} и сравним с исходным уравнением (12.1). Чтобы уравнение было инвариантным относительно преобразования Лоренца, необходимо выполнение соотношения

$$\hat{I}_\alpha = \sum_{\beta} \Lambda_{\alpha\beta} \mathbf{D} \hat{I}_\beta \mathbf{D}^{-1}$$

или

$$\mathbf{D}^{-1} \hat{I}_\alpha \mathbf{D} = \sum_{\beta} \Lambda_{\alpha\beta} \hat{I}_\beta. \quad (12.4)$$

Данное условие означает, что матрицы \hat{I} преобразуются как компоненты четырехвектора. Представьте себе такой вектор, все четыре компоненты которого — матрицы $n \times n$.

12.2 Минимизация числа уравнений

Попытаемся сконструировать релятивистское уравнение (12.1), имеющее минимальное число компонент n волновой функции. Для этого воспользуемся неприводимыми представлениями группы Лоренца, начиная с наименьшей размерности.

Представление $\mathbf{D}^{(00)}$

Начнем с наиболее простого скалярного представления. Перенесем в уравнении (12.1) в правую часть последнее слагаемое $i_k \psi$. Получится, что левая часть преобразуется по представлению $D^{(00)} \otimes D^{(1/2,1/2)} = D^{(1/2,1/2)}$, а правая часть по представлению $D^{(00)}$. Две величины, преобразующиеся по разным представлениям, не могут быть равны. Если же в правой части одномерное представление $D^{(00)}$ дополнить четырехмерным представлением $D^{(1/2,1/2)}$, то волновая функция станет 5-компонентной.

Представление $\mathbf{D}^{(\frac{1}{2}0)}$

Левая часть в уравнении (12.1) преобразуется по представлению

$$D^{(1/2,0)} \otimes D^{(1/2,1/2)} = D^{(0,1/2)} \oplus D^{(1,1/2)},$$

которое разложено в прямую сумму неприводимых представлений по формуле (11.8). В то же время правая часть преобразуется по представлению $D^{(1/2,0)}$. Написать Лоренц-инвариантную систему опять не получилось.

Представление $\mathbf{D}^{(\frac{1}{2}0)} \oplus \mathbf{D}^{(0\frac{1}{2})}$

Размерность представления

$$D = D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$$

равна $\dim D = 4$. Левая часть преобразуется как

$$(D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}) \otimes D^{(1/2,1/2)} = D^{(0,1/2)} \oplus D^{(1,1/2)} \oplus D^{(1/2,0)} \oplus D^{(1/2,1)}.$$

Среди них имеется представление $D^{(1/2,0)} \oplus D^{(0,1/2)}$, по которому преобразуется правая часть. Это и есть минимальная система 4 уравнений.

Представления $D^{(1/2,0)}$, $D^{(0,1/2)}$ состоят из матриц Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12.5)$$

из которых можно сконструировать блочные матрицы \hat{I} . Напомним, что алгебра матриц Паули дается формулой

$$\sigma_i \sigma_j = i e_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij}.$$

Четырехкомпонентная волновая функция ψ называется *биспинором*.

12.3 Матрицы Дирака

В размерных единицах уравнение Дирака имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = (\beta mc^2 + \alpha \hat{p}c) \psi, \quad (12.6)$$

где c — скорость света, m — масса электрона, \hbar — постоянная Планка. Квадрат оператора Гамильтона в правой части должен дать релятивистскую связь импульса и энергии

$$\hat{H}^2 = m^2 c^4 + c^2 \hat{p}^2 = m^2 c^4 \beta^2 + c^2 \hat{p}_i \hat{p}_j \alpha_i \alpha_j + (\beta \alpha_i + \alpha_j \beta). \quad (12.7)$$

Перепишем второе слагаемое в правой части (12.7) в симметризованном виде

$$\frac{1}{2} c^2 \hat{p}_i \hat{p}_j (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i),$$

найдем условия, которым должны удовлетворять матрицы Дирака α , β :

$$\begin{aligned} \beta^2 = \alpha_1^2 = 1, \quad \beta \alpha_i + \alpha_j \beta = 0, \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0, \quad j \neq i. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Матрицы, удовлетворяющие условию (12.8), не единственны. Приведем один из вариантов

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12.9)$$

Упражнение 17. Проверить, что соотношения (12.8) выполнены для матриц (12.9).

Нетрудно заметить, что вектор α , состоит из блочных матриц 4×4 , которые в свою очередь составлены из матриц Паули (12.5)

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Использование таких матриц удобно не во всех задачах, поэтому вместо них вводятся другие матрицы

$$\gamma_0 = \beta, \quad \gamma = \beta\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ -\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 18. Найти антикоммутирующие соотношения для γ матриц

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}, \tag{12.10}$$

где $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ — метрический тензор в пространстве Минковского.

Само уравнение Дирака в этом представлении имеет явно релятивистски инвариантную форму

$$\left(\gamma_0 \frac{\hat{E}}{c} - \gamma \hat{\mathbf{p}} - mc \right) \psi = 0. \tag{12.11}$$

Если ввести четырехмерное «скалярное» произведение $a_\mu b_\mu = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, то уравнение становится еще проще

$$(\gamma_\mu \hat{p}_\mu - mc) \psi = 0.$$

Замечание 12.1. Фактически для вывода уравнения Дирака мы воспользовались симметрией относительно группы Пуанкаре, потому что сразу считали матрицы \hat{I} независимыми от координат и времени. Это следствие трансляционной инвариантности.

Замечание 12.2. С помощью неприводимых представлений можно сконструировать и другие уравнения, инвариантные относительно преобразований группы Лоренца (или Пуанкаре). Это уравнения для массивных и безмассовых частиц со спином $s = 0, 1/2, 1$, см. [26].

Упражнение 19. С помощью антикоммутирующего соотношения (12.10) докажите следующие свойства следов от произведений γ -матриц.

1. След произведения нечетного числа γ -матриц равен нулю.
2. $\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4\delta_{\mu\nu}$.
3. $\text{tr}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = 4(\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho})$.
4. $\text{tr}(\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma) = -4i e_{\mu\nu\rho\sigma}$.

Здесь

$$\gamma_5 = i\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_0 = i\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -\sigma_1,$$

а $e_{\mu\nu\rho\sigma}$ — полностью антисимметричный тензор 4-го ранга.

Литература

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика, Изд. 4е*, Наука, Москва, 1988.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика, Изд. 4е*, Наука, Москва, 1989.
- [3] Дж. Коул, *Методы возмущений в прикладной математике*, Мир, Москва, 1972.
- [4] А. Найфэ, *Методы возмущений*, Мир, Москва, 1976.
- [5] В. Г. Зелевинский, *Конспект лекций по квантовой механике, ч.II*, НГУ, Новосибирск, 1970.
- [6] П.В. Елютин, Д. В. Кривченко, *Квантовая механика (с задачами)*, Наука, Москва, 1976.
- [7] М. В. Федорюк, *Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, 1983.
- [8] Дж. Хединг, *Введение в метод фазовых интегралов*, Мир, Москва, 1965.
- [9] И. В. Колоколов, Е. А. Кузнецов, А. И. Мильштейн, Е. В. Подивилов, А. И. Черных, Д. А. Шапиро, Е. Г. Шапиро, *Задачи по математическим методам физики. Изд. 3е.*, URSS, Москва, 2007.
- [10] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи рассеяния*, Наука, Москва, 1980.
- [11] Р. Буллаф, Ф. Кодри, С.П. Новиков, *Солитоны*, Мир, Москва, 1983.
- [12] М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, Москва, 1987.
- [13] А. Ньюэлл, *Солитоны в математике и физике*, Мир, Москва, 1989.
- [14] Дж. Лэмб, *Теория солитонов*, БИБФИЗМАТ, Москва, 1997.

- [15] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, *Изв. АН СССР. Сер. мат.* **15**(4), 309–360 (1951).
- [16] В. А. Марченко, Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеянных волн, *Докл. АН СССР* **104**(5), 695–698 (1955).
- [17] Р. Фейнман, А. Хибс, *Квантовая механика и интегралы по траекториям*, Мир, Москва, 1968.
- [18] Р. Фейнман, *Статистическая механика*, Мир, Москва, 1975.
- [19] Л. Э. Генденштейн, И. В. Криве, Суперсимметрия в квантовой механике, *Усп. физ. наук* **146**(4), 553–590 (1985).
- [20] З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике. Т.1.*, Мир, Москва, 1974.
- [21] У. Миллер, *Симметрия и разделение переменных*, Мир, Москва, 1981.
- [22] Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, Москва, 1978.
- [23] С. А. Владимиров, *Группы симметрии дифференциальных уравнений и релятивистские поля*, Атомиздат, Москва, 1979.
- [24] Н. Х. Ибрагимов, *Группы преобразований в математической физике*, Наука, Москва, 1983.
- [25] А. А. Кириллов, *Элементы теории представлений*, Наука, Москва, 1978.
- [26] Дж. Эллиот, П. Добер, *Симметрия в физике, в 2-х т.*, Мир, Москва, 1983.
- [27] М. И. Петрашень, Е. А. Трифонов, *Применения теории групп в квантовой механике. Изд. второе.*, URSS, Москва, 1999.
- [28] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, *Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения*, Физматгиз, Москва, 1958.
- [29] Г. Я. Любарский, *Теория групп и ее применение к физике*, ГИФМЛ, Москва, 1958.
- [30] Д. П. Желобенко, А. И. Штерн, *Представления групп Ли*, Наука, Москва, 1983.
- [31] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, Москва, 1980.

Предметный указатель

- α -матрицы, 74
- γ -матрицы, 75
- генераторы
 - бустов, 68
 - поворотов, 68
 - трансляций, 65
- граф Стокса, 12
- группа
 - $\mathcal{E}(3)$, 64
 - Лоренца, 65
 - общая, 66
 - Пуанкаре, 65
- интеграл
 - по траекториям, 47
 - фазовый, 16
- коллапс, 43
- константа Стокса, 12
- линии
 - антистоксовы, 11
 - стоксовы, 11
- матрица
 - перехода, 12
 - переходная, 22
- нелинейное уравнение Шредингера
 - двумерное, 39
 - одномерное, 29
- оператор
 - Гельмгольца, 63
 - Даламбера, 62
 - симметрии, 63
 - хронологический, 46
- переходной слой, 4
- пограничный слой, 1
- потенциал
 - Баргмана, 34
 - безотражательный, 28
 - осциллятора, 57
 - форминвариантный, 56
- представление
 - треугольное, 23
 - простой солитон, 35
- решение
 - внешнее, 2
 - внутреннее, 3
 - доминантное, 11
 - субдоминантное, 11
- суперзаряды, 52
- точка поворота, 10
- уравнение
 - sin-Гордона, 29
 - Гарднера—Грина—Крускала—Миуры, 32
 - Гельфанда — Левитана — Марченко, 26
 - Дирака, 74
 - Кортевега — де Фриза, 29, 31
 - Лакса, 30
 - Рикатти, 10, 55
 - Фоккера—Планка, 49
 - Шредингера, 9
- функция
 - Йоста, 20