Задание №1 «Гамма–функция Эйлера»

Задача 1.1. Выразить через Γ–функции интеграл

$$I(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \cos^a\varphi \sin^b\varphi.$$

При каких a, b определён данный интеграл?

Задача 1.2. Построить аналитическое продолжение Γ–функции на все комплексные значения аргумента кроме отрицательных целых числен и нуля, доказав представление

$$\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin\pi z} \oint\limits_{-\infty}^{(0)} \frac{dt}{2\pi i}\, t^{z-1}e^t,$$

где контур интегрирования огибает разрез $(-\infty, 0]$ в положительном направлении. Используя данное представление, вычислить вычеты $\mathrm{res}_{z=-n}\,\Gamma(z)$, $n\in\mathbb{N}$.

Задача 1.3. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 dz\, \ln\Gamma(z).$$

Задача 1.4 (*)**.** Упростить выражение $|\Gamma(ix)|$, $x\in\mathbb{R}$.

Задача 1.5 (*)**.** Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\ln x}{\mathrm{ch}^2\, x} dx.$$

Замечание. Данный интеграл связан со значениями температуры перехода T_c и величины щели Δ в теории сверхпроводимости $I = \ln(\Delta/4T_c)$.