Задание №6 «Ортогональные полиномы»

Задача 6.1. Полиномы Чебышёва I рода $T_n(x)$ являются собственными функциями оператора

$$(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - x\frac{d}{dx}, \quad -1 < x < 1.$$

Найти собственные значения и представление Родрига собственных функций данного оператора.

Задача 6.2. Полиномиальные решения вырожденного гипергеометрического уравнения

$$x\frac{d^2\psi}{dx^2} + (m+1-x)\frac{d\psi}{dx} + n\psi = 0, \quad x > 0$$

с натуральными параметрами n, $m \in \mathbb{N}$, нормированные условием $\psi(0) = \frac{(n+m)!}{n!m!}$, называются обобщёнными полиномами Лагерра $L_n^m(x)$.

- Получить явное выражение для полиномов $L_n^m(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$.
- Получить интегральное представление для $L_n^m(x)$.
- Получить рекуррентное соотношение, связывающее L_{n+1}^m, L_n^m, L_{n-1}^m.
- Упростить сумму

$$\sum_{k=0}^{n} L_k^m(x).$$

Задача 6.3. Вычислить производящие функции для полиномов Лаггера

$$G_m(t;x) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n L_n^m(x), \qquad g_n(t;x) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m L_n^m(x).$$