Задание №7 «Функции Эрмита»

Задача 7.1. Вычислить интеграл

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2} H_n(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Задача 7.2. Выразить через полиномы Лежандра P_n значение интеграла

$$I_n(y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} H_n(xy) dx.$$

Задача 7.3. Выразить через полиномы Лаггера

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[e^{-x} x^n\right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(0)} \frac{dt}{t^{n+1}} (1+t)^n e^{-xt}$$

среднее оператора трансляции $e^{\alpha \hat{x}}$ по n–ому состоянию гармонического осциллятора.

$$I_n(\alpha) = \langle n| e^{\alpha \hat{x}} |n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha x} |\psi_n^{\text{osc}}(x)|^2 dx, \qquad \psi_n^{\text{osc}}(x) = \frac{e^{-x^2/2} H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}.$$

Задача 7.4 (*)**.** Вычислить матрицу плотности гармонического осциллятора в координатном представлении (в качестве единицы энергии выбрана $\hbar\omega$, единицы длины — $x_0 \equiv \sqrt{\hbar/m\omega}$)

$$\rho(x', x) = \langle x'| \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{Z} |x\rangle = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^{\text{osc}}(x') \psi_n^{\text{osc}}(x) e^{-\beta(n+\frac{1}{2})}, \qquad \psi_n^{\text{osc}}(x) = \frac{e^{-x^2/2} H_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}.$$

Здесь $Z = \left(2 \operatorname{sh} \frac{\beta}{2}\right)^{-1}$ — статистическая сумма, обеспечивающие условие нормировки $\operatorname{tr} \hat{\rho} = 1$.

Задача 7.5. Найти асимптотическое поведение функций Эрмита $H_\nu(x)$, $x \to \pm\infty$, $\nu \in \mathbb{R}$.

$$H_\nu(\xi) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0)} \frac{dt}{t^{\nu+1}} e^{2\xi t - t^2}.$$

Задача 7.6 (*)**.** Найти уровни энергии гармонического осциллятора в ящике размера W, если расстояние между центром ящика и минимумом потенциала равно y.

$$\left[-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{2} - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\right] \psi(x) = 0, \qquad \psi\left(W/2 + y\right) = \psi\left(-W/2 + y\right) = 0.$$

- Напишите уравнение на уровни $\nu_n(y)$ используя функции Эрмита H_ν.
- Покажите, что $\nu_n(y = 0) \approx n$ и найдите поправку для $y \ll 1 \ll W$.
- Покажите, что $\nu_n(y = \pm W/2) = 2n + 1$ и найдите наклон $v = \partial\nu/\partial y|_{y=\pm W/2}$ в пределе $W \gg 1$.

Подсказка. Вам может пригодится следующее представление

$$H_\nu(\xi) = \frac{2^\nu \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1-\nu}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{-\nu}{2}, \frac{1}{2}; \xi^2\right) - \frac{2^{\nu+1}\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{-\nu}{2}\right)} {}_1F_1\left(\frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; \xi^2\right) \xi.$$