

Задание №8 «Функции Лежандра»

Задача 8.1. Найти значение $P_{2n}(0)$.

Задача 8.2. Вычислить интегралы

$$A_n = \int_0^\pi P_{2n}(\cos \theta) d\theta, \quad B_n = \int_0^\pi P_{2n+1}(\cos \theta) \cos \theta d\theta.$$

Задача 8.3. Найти электростатическое поле (трёхмерной) сферы радиуса R , заряженной по поверхности по закону $\sigma(\theta, \varphi) = \sigma_0 \cos 3\theta$.

Задача 8.4 (*). Доказать справедливость следующего интегрального представления для полиномов Лежандра

$$P_n(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \theta + i \sin \theta \cos \varphi)^n d\varphi.$$

Задача 8.5 (*). Вычислить производящую функцию полиномов Лежандра

$$G(\cos \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} P_n(\cos \theta).$$